

Líneas de transmisión

Xavier Xirgu Aleixandre

PID_00159140

Índice

Introducción	7
Objetivos	10
1. Líneas de transmisión	11
1.1. Concepto de línea de transmisión	11
1.2. Características físicas de las líneas de transmisión	14
1.2.1. Representación esquemática de las líneas de transmisión	15
1.2.2. Clasificación de las líneas de transmisión en función de su sección transversal	16
1.2.3. Características propias de las líneas	17
1.3. Señales dentro de las líneas de transmisión	18
1.4. Características del modelo de las líneas de transmisión	20
1.4.1. Hipótesis inicial: aproximación cuasiestática	20
1.4.2. Campos eléctricos y magnéticos entre conductores	21
1.5. Modelo de línea de transmisión	23
1.6. Ecuaciones de onda en una dimensión	28
o ecuaciones del telegrafista	28
1.6.1. Impedancia característica	29
1.6.2. Aproximación a líneas de transmisión ideales	31
1.7. Coeficiente de reflexión	33
1.8. Posibles valores de la impedancia de carga, Z_L	36
1.8.1. Impedancia de carga real	36
1.8.2. Impedancia de carga imaginaria	37
1.8.3. Impedancia de carga compleja	39
1.9. ¿Qué hemos aprendido?	39
2. Ejemplos de circuitos	41
2.1. Circuitos con una línea de transmisión	41
2.1.1. Coeficiente de reflexión en el generador	41
2.2. Circuitos con dos líneas de transmisión:	43
coeficiente de transmisión	43
2.3. ¿Qué hemos aprendido?	45
3. Transmisión de señales sinusoidales	46
3.1. Las señales sinusoidales	46
3.2. Propiedades de las señales sinusoidales	48
3.2.1. Longitud de onda	48
3.2.2. Interferencia	49
3.3. Coeficiente de reflexión en una línea de transmisión ideal con señales sinusoidales	51

3.3.1. Coeficiente de reflexión en la carga	53
3.4. Impedancia de entrada en una línea de transmisión con señales sinusoidales	53
3.5. Periodicidad de la impedancia de entrada, o líneas de $\lambda/2$	55
3.5.1. Impedancia en cortocircuito y en circuito abierto	56
3.6. Inversor de impedancia de entrada o líneas de $\lambda/4$	57
3.7. Ondas estacionarias	59
3.7.1. Relación de onda estacionaria	62
3.8. ¿Qué hemos aprendido?	64
4. La carta de Smith	66
4.1. Descripción de la carta de Smith	66
4.2. Cómo se utiliza la carta de Smith	73
4.2.1. Ejemplo de utilización de la carta de Smith	75
4.2.2. Ejemplo de determinación de impedancias de carga	78
4.3. Precisión de la carta de Smith	80
4.4. ¿Qué hemos aprendido?	81
5. Adaptación de impedancias	82
5.1. Adaptación en serie	82
5.2. Adaptación en paralelo	84
5.3. Transformador $\lambda/4$	86
5.4. ¿Qué hemos aprendido?	88
6. Tipos de líneas de transmisión	89
6.1. Pequeña introducción a las pérdidas	89
6.1.1. Pérdidas del conductor	89
6.1.2. Pérdidas por radiación	90
6.1.3. Pérdidas por calentamiento del dieléctrico	90
6.1.4. Pérdidas por acoplamiento y descarga	90
6.2. Parámetros característicos de las líneas de transmisión con pérdidas	91
6.2.1. Líneas de pérdidas bajas	92
6.2.2. Efecto de la atenuación en el coeficiente de reflexión	92
6.3. Tipos de líneas de transmisión	93
6.3.1. Líneas de placas paralelas	93
6.3.2. Líneas bifilares	95
6.3.3. Líneas de transmisión coaxiales o concéntricas	96
6.3.4. Líneas triplaca	97
6.3.5. Línea micropista	98
6.3.6. Líneas coplanares	99
6.4. ¿Qué hemos aprendido?	100
7. Problemas resueltos	102
7.1. Enunciados	102
7.2. Soluciones	102

Resumen	108
Ejercicios de autoevaluación	111
Solucionario	113
Glosario	113
Bibliografía	113

Introducción

En otros módulos habéis visto cuáles son las características principales de las ondas electromagnéticas, cómo se propagan en el vacío, entre placas conductoras o en guías de ondas. En este módulo hablaremos de un nuevo elemento relacionado con la propagación de las ondas electromagnéticas: las líneas de transmisión.

Podéis ver las características principales de las ondas electromagnéticas y cómo se propagan en los módulos “Leyes de Maxwell” y “Propagación de ondas electromagnéticas”.

Lo primero que os podéis preguntar a la hora de pensar en las líneas de transmisión puede ser: ¿qué son? ¿cómo son estos dispositivos? ¿para qué sirven?

Para intentar responder a estas preguntas, podemos hacer uso de la wikipedia, que dice:

“Una línea de transmisión es una estructura material utilizada para dirigir la transmisión de energía en forma de ondas electromagnéticas, comprendiendo el todo o una parte de la distancia entre dos lugares que se comunican”.

Para que os hagáis una idea: el cable que lleva la señal de televisión desde la antena hasta el televisor es un línea de transmisión (a pesar de que muy larga en comparación con algunas de las que veremos en este módulo).

Os puede parecer que conectando una antena a un receptor mediante un cable cualquiera es suficiente para tener una buena recepción de una señal, pero no es así.

La necesidad de las líneas de transmisión

Os pondremos un par de ejemplos para entender mejor por qué son necesarias las líneas de transmisión y qué problemas nos podemos encontrar al conectar dos dispositivos.

Tomad como ejemplo un circuito compuesto por un grifo y una lavadora. Entre estos dos dispositivos necesitamos una manguera, que es el elemento que hará la función de línea de transmisión, con tal de conectar ambos aparatos y poder transmitir el agua desde el grifo hasta la lavadora. Si el grifo está abierto, depende del grosor y la longitud de la manguera que vuestra lavadora reciba toda el agua que necesita para lavar la ropa. Miradlo con más detalle:

- Si, por ejemplo, ponemos una manguera muy estrecha y larga, habrá una gran resistencia al paso del agua y la lavadora no recibirá suficiente agua (aparte de que posiblemente el grifo no tendrá suficiente potencia o presión para trasladar toda el agua hasta la entrada de la lavadora), de modo que se puede estropear por falta de agua.
- Si, en el caso contrario, utilizamos una manguera demasiado gruesa, habrá menos resistencia, pero podemos tener demasiada entrada de agua, de manera que la lavadora tampoco funcione correctamente.

Por tanto, hemos de diseñar todo el sistema para que la lavadora reciba la cantidad exacta de agua que necesita y así poder lavar la ropa sin problemas. En este caso diremos que el sistema se encuentra bien adaptado o bien acoplado.

Os mostraremos más funcionalidades de la línea de transmisión con el siguiente ejemplo:

Posiblemente alguna vez todos hemos tenido una cuerda muy larga en las manos que se ha enganchado en alguna esquina o algún obstáculo del suelo. Instintivamente todos he-

mos tomado la cuerda y hemos hecho un movimiento brusco con el brazo con tal de generar un movimiento o “señal” que se propagara a través de la cuerda y el cual, al llegar al obstáculo, la desenganchará. Ahora bien, cuando la “señal” llega al obstáculo pueden pasar dos cosas:

- Si el obstáculo ha absorbido toda la energía que hemos transmitido a la cuerda, ésta quedará enganchada.
- Pero si el obstáculo no ha podido aguantar toda la energía de la señal que circula por la cuerda, ésta se desenganchará.

A la hora de generar esta perturbación, o señal, también hemos de tener en cuenta las propiedades de las cuerdas que tenemos en las manos. En el caso de tener una cuerda muy pesada deberemos hacer un gran esfuerzo para propagar la señal, o no tendrá suficiente fuerza para llegar al obstáculo; si la cuerda es muy larga la señal tampoco llegará al obstáculo que engancha la cuerda.

En el caso de las líneas de transmisión no se transmitirá una señal generada por un movimiento físico, como el de nuestro brazo, sino una diferencia de potencial que se propagará por el interior de la línea.

Los ejemplos anteriores nos muestran símiles de líneas de transmisión con tal de que os hagáis una idea de qué problemas podemos tener a la hora de conectar un dispositivo generador de una señal y otro dispositivo receptor de la señal. Estos problemas suponen un gran obstáculo a la hora de diseñar, por ejemplo, sistemas de transmisión y recepción de radio, en los que la señal es muy sensible a alteraciones y atenuaciones. También pueden suponer un obstáculo para diseñar dispositivos como filtros de radio, a causa de las características de las señales que filtrar, en los que podemos utilizar las líneas de transmisión para modificar nuestra señal.

En este módulo veremos cómo podemos diseñar las líneas de transmisión, el elemento de conexión entre dos dispositivos, para obtener el mejor grado de acoplamiento o adaptación posible (recordad el ejemplo anterior).

El término *acoplamiento* se utiliza cuando una señal se ha transmitido en su totalidad, sin que haya experimentado ningún tipo de pérdida o atenuación desde el dispositivo que lo genera hasta el dispositivo que lo recibe.

En el primer apartado de este módulo explicaremos qué son las líneas de transmisión para que tengáis una idea conceptual y haremos un modelo equivalente para poder trabajar fácilmente. Una vez tengamos el modelo equivalente, definiremos los parámetros principales. En el apartado 2 veremos unos ejemplos de aplicación del modelo equivalente directamente sobre circuitos y cómo evolucionan las señales por el interior de la línea de transmisión.

En el apartado 3 estudiaremos el caso particular de la transmisión de señales sinusoidales por la línea de transmisión y cómo se crean las ondas estacionarias dentro de las líneas.

En el apartado 4 presentaremos una herramienta imprescindible para trabajar con las líneas de transmisión: la carta de Smith. Veremos que esta herramienta puede simplificarnos mucho el trabajo y todos los cálculos. En el apartado 5 veremos unos ejemplos aplicados de uso de la carta de Smith.

En el apartado 6 os presentaremos una introducción a las líneas de transmisión con pérdidas, así como los diferentes tipos de líneas de transmisión que

os podéis encontrar en el día a día. También echaremos un vistazo a las líneas del tipo micropista y triplaca, muy importantes, ya que son las más utilizadas en los circuitos integrados que se hacen actualmente.

Sólo nos queda deseáros ánimos para estudiar este módulo y si en algún momento pensáis que las líneas de transmisión parecen complicadas, no os asustéis; lo son, pero no tanto como parece al principio, y ya veréis que con la carta de Smith todos los cálculos se simplifican mucho.

Objetivos

Los principales objetivos de este módulo son los siguientes:

1. Entender qué es una línea de transmisión.
2. Comprender los parámetros que definen una línea de transmisión para saber cómo funciona.
3. Entender el concepto de transmisión de la diferencia de potencial entre dos puntos de un circuito.
4. Aprender el funcionamiento de la carta de Smith, cuál es su utilidad, los parámetros que la definen y cómo utilizarla.
5. Entender el concepto de adaptación de impedancias en las líneas de transmisión.
6. Comprender los conceptos explicados y saberlos aplicar en el diseño de circuitos, y entender cómo varía su comportamiento en función de la frecuencia.
7. Tener la base de algunos diseños de líneas de transmisión, incluidos los de los tipos micropista y triplaca, con tal de obtener un conocimiento más general de las diferentes estructuras y configuraciones en las que hay que tener en cuenta las líneas de transmisión.

1. Líneas de transmisión

Iniciaremos la introducción a las líneas de transmisión con el objetivo de que entendáis conceptualmente:

- cómo son las líneas de transmisión,
- cuál es su función,
- qué elementos las componen,
- cómo son las señales que circulan.

Después veréis cómo podemos construir un modelo eléctrico que se comporte igual que las líneas de transmisión, mediante elementos pasivos tan básicos como una resistencia, un condensador y una bobina.

1.1. Concepto de línea de transmisión

Tal y como hemos dicho en la introducción del módulo, las líneas de transmisión sirven para transmitir señales eléctricas (ondas electromagnéticas) de un dispositivo a otro.

Siguiendo con el ejemplo de la cuerda, imaginad que ahora la cuerda está atada a una pared, en lugar de estar enganchada en un obstáculo del suelo. Si generamos un movimiento brusco con el brazo, podemos comparar los elementos de este ejemplo con los elementos de un circuito eléctrico (podéis ver las figuras 1a y 1b):

- En la figura 1a tenéis un circuito que incluye un generador de señales sinusoidales, formado por V_0 y Z_0 , una línea de transmisión (elemento central), y una carga o impedancia, Z_L .
- En la figura 1b tenéis la representación del ejemplo de una persona con un extremo de una cuerda en la mano y el otro extremo atado a una pared.

A la hora de realizar la comparación, nuestro brazo sería la fuente de la señal correspondiente a la fuente de tensión en el circuito; la cuerda, nuestra línea de transmisión; y el obstáculo, nuestro dispositivo que recibe la señal y la usa (la procesa) o simplemente la disipa.

Figura 1

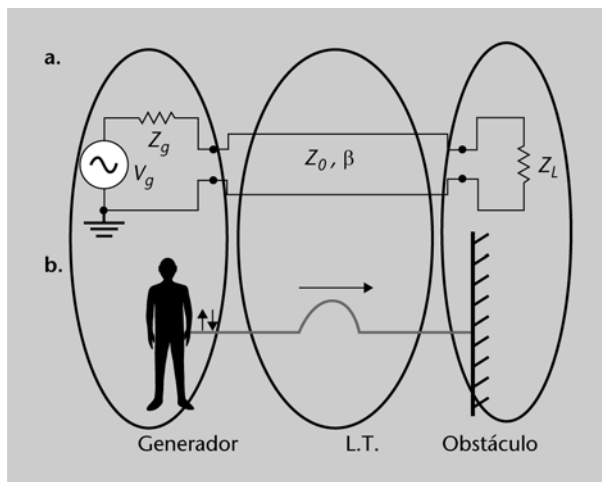


Figura 1

Comparación del circuito eléctrico con una línea de transmisión (a) y un movimiento generado con las manos en una cuerda atada a la pared (b).

En la figura a) la fuente de tensión haría de generador, Z_L haría de carga u obstáculo y la cuerda haría de línea de transmisión.

En el caso de los circuitos eléctricos, lo que intentan transmitir a través de la línea es una señal eléctrica (u onda electromagnética) caracterizada por una tensión y una corriente.

La señal eléctrica estará generada por una fuente de tensión, que conectaremos a la línea de transmisión. Como toda fuente de tensión, está formada por dos polos (uno positivo y otro negativo); necesitaremos conectar la línea de transmisión en estos dos polos. Con tal de poder utilizar nuestro símil de la cuerda, necesitamos dos cuerdas para poder simular los dos polos de la fuente de tensión y de la línea de transmisión (ved la figura 2). Lo que mediremos en el símil será la diferencia de posición entre las dos cuerdas a una distancia determinada de nuestras manos.

Figura 2

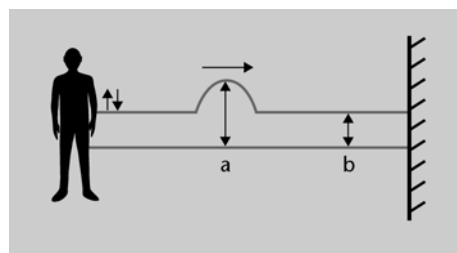


Figura 2

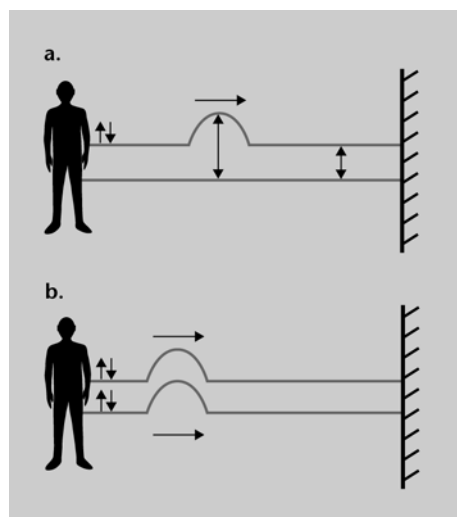
Representación de la transmisión de señales mediante la propagación de una perturbación en las dos cuerdas. En el punto a tendremos una amplitud de señal diferente de la del punto b (cero).

Las señales generadas por la fuente de tensión pueden tener cualquier forma:

- tensión constante, ejemplo de solo hacer un movimiento brusco con un brazo y dejar el otro quieto, tal y como podéis ver en la figura 3a;
- tensión alterna, ejemplo de realizar un movimiento con los dos brazos, con un valor de pico determinado por la diferencia de potencial entre los dos terminales de la fuente, figura 3b.

De esta manera, nuestra línea de transmisión será un dispositivo que conectaremos a los dos polos de una fuente de tensión, por la que circulará la señal generada (ya sea una señal con corriente continua, DC, o con alterna, AC).

Figura 3

**Figura 3**

Símil de generación de tensión con corriente continua (a) o con alterna (b), en función de si generamos la señal con un brazo o con los dos.

Tal y como hemos dicho en la introducción del módulo, no es suficiente con utilizar un cable o hilo eléctrico para conectar una fuente y un aparato, es necesario que el cable esté adaptado a la señal que se quiere propagar y al aparato al que se va a conectar.

En las líneas de transmisión lo que haremos es analizar cómo se propaga una corriente (y también una tensión) en **forma de onda**. Como toda onda, esta se propaga y puede “impactar” contra los elementos del circuito y reflejarse total o parcialmente.

Hay que recalcar que en las líneas de transmisión es muy importante su longitud respecto a la longitud de la onda, de modo que si tenemos una línea muy corta, no podremos utilizarla como línea de transmisión, ya que la onda no podrá circular por ella. En los circuitos en los que la longitud de la onda es superior a la longitud del circuito no se puede aplicar el concepto de línea de transmisión; en este caso utilizaremos la teoría de circuitos.

Es importante que os quedéis con el concepto de **línea de transmisión**:

Es un dispositivo que sirve para transmitir señales electromagnéticas, en forma de onda, de una fuente a una carga.

Su funcionamiento se basa en el tiempo que tarda la señal, u onda electromagnética, en propagarse por el interior de la línea de transmisión.

El hecho de que el funcionamiento de las líneas de transmisión se base en el tiempo de propagación de la señal concuerda con el hecho de que la longitud de la línea de transmisión debe ser mucho más larga que la longitud de onda de la señal.

Utilizando el ejemplo de la cuerda, si tenemos una cuerda muy corta, nos será muy difícil, o incluso imposible, generar una señal que se pueda propagar.

1.2. Características físicas de las líneas de transmisión

Una vez vista la idea de líneas de transmisión, veamos exactamente qué son.

Definiremos físicamente la **línea de transmisión** como un sistema de dos, o más, conductores separados por un dieléctrico y con las características siguientes:

- Los conductores se encuentran en disposición paralela.
- Los conductores están inmersos en un medio dieléctrico.
- La sección transversal del sistema no cambia a lo largo de su recorrido.

Pero ¿qué nos está diciendo esta definición? Pues, en otras palabras, que:

- Una línea de transmisión está formada por, al menos, dos conductores: si pensáis en el cable de la televisión, fijaos en que es un cable coaxial, con un conductor dentro y otro fuera (ved la figura 4).
- Los conductores están en un medio dieléctrico, es decir, aislante: una vez más, si pensamos en el cable de la televisión, tenemos que los dos conductores están separados por el plástico.
- La disposición de los dos conductores es siempre igual. Si tomamos como ejemplo de línea de transmisión el cable de la antena, podemos cortar el cable en cualquier punto y la sección que veremos será exactamente la misma en todos los puntos, de manera que no ha cambiado su sección transversal. La sección transversal permite, incluso, clasificar las líneas de transmisión.

Recordad

El aire también es un dieléctrico.

Figura 4

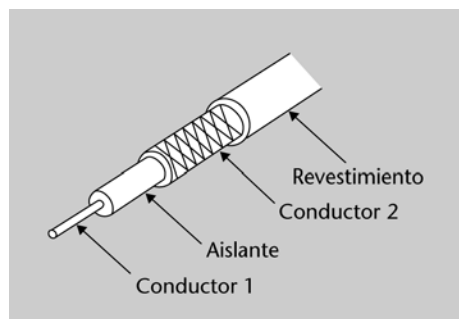


Figura 4

Cable coaxial de una antena de televisión. Podéis observar los dos conductores, dispuestos concéntricamente, el material aislante entre ambos y el revestimiento de plástico.

Una vez visto qué son las líneas de transmisión, hemos de ver cómo trabajar esquemáticamente. Pensad en los circuitos eléctricos: un condensador es un objeto físico, pero cuando dibujamos un circuito lo representamos sólo con dos barras verticales. Con las líneas de transmisión hacemos lo mismo: las representamos esquemáticamente.

1.2.1. Representación esquemática de las líneas de transmisión

A continuación os mostraremos cómo se representan las líneas de transmisión. Para hacerlo, tomaremos tres maneras diferentes de representarlas, como las que tenéis en la figura 5: bifilares, plano-paralelas y concéntricas.

Figura 5

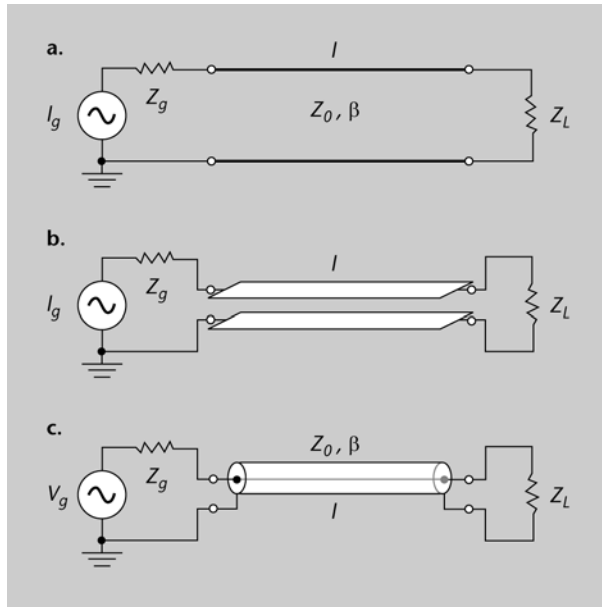


Figura 5

Distintas representaciones gráficas de las líneas de transmisión: a) bifilares, formadas por dos hilos conductores en paralelo; b) planas; c) concéntricas, formadas por dos conductores concéntricos uno respecto al otro (fuente: en.wikipedia.org).

Fijaos en que todas las representaciones esquemáticas de las líneas están formadas por:

- un puerto de entrada formado por dos polos o conectores, al cual normalmente conectaremos un generador de tensión (figura 6),

Figura 6

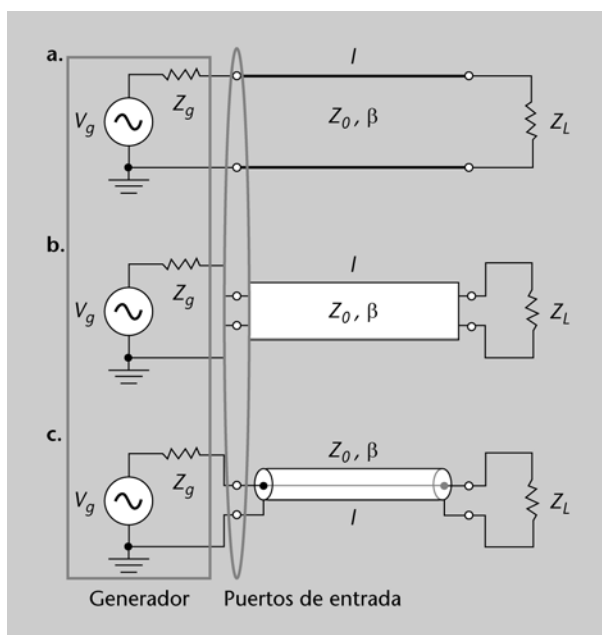
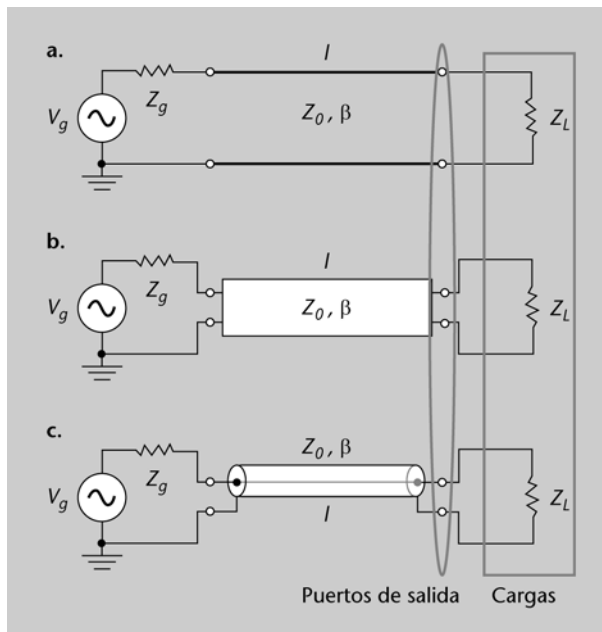


Figura 6

Situación de los puertos de entrada en una línea de transmisión, donde se conectan los generadores de señales.

- los dos o más conductores en la configuración apropiada: paralela o concéntrica,
- un puerto de salida igualmente formado por dos polos o conectores, al cual conectaremos una carga, Z_L , (el subíndice L proviene del vocablo inglés *load*, 'carga'), presentada en la figura 7 de la forma más general.

Figura 7

**Figura 7**

Posición de los puertos de salida de las líneas de transmisión y de las cargas.

Los componentes básicos de las líneas de transmisión son:

- Puerto de entrada
- Los conductores (dos o más)
- Puerto de salida

Ahora bien, ¿por qué hemos elegido precisamente estas tres posibles representaciones? Pues porque cada una responde a un tipo diferente de línea de transmisión, según cuál sea su función transversal, como veréis a continuación.

Cabe señalar que, a la hora de trabajar con esquemas de circuitos, se utiliza indistintamente cualquiera de los tres tipos de representaciones, independientemente de la línea a la que corresponda.

1.2.2. Clasificación de las líneas de transmisión en función de su sección transversal

En función de su sección transversal podemos encontrar líneas de transmisión de los siguientes tipos:

- **Bifilares.** La línea está formada por dos hilos, o conductores, en disposición paralela, como podéis ver en la figura 5a. Estas líneas se utilizan en algunas antenas de televisión (a pesar de que hoy en día lo más normal es utilizar los cables coaxiales).
- **Coplanares.** La línea está formada por dos o más planos en disposición paralela, como podéis ver en la figura 5b. Este tipo de línea se utiliza en circuitos integrados. Normalmente se utilizan para diseñar las líneas micropista (en inglés *microstrip*) y triplaca (en inglés *stripline*), que describiremos en el último apartado del módulo.
- **Concéntricas.** La línea está formada por dos conductores cilíndricos, normalmente uno dentro del otro, como los de la figura 5c. El ejemplo más usual de este tipo de líneas es el cable de la antena de televisión.

Aparte de las características físicas de las líneas de transmisión, podremos diferenciar dos líneas del mismo tipo (ya sea bifilar, coplanar o concéntrica) según sus propias características.

1.2.3. Características propias de las líneas

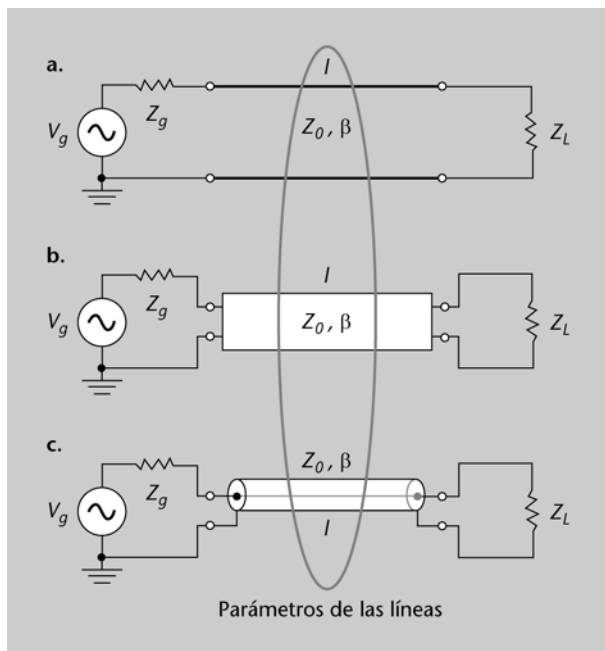
Las líneas de transmisión se caracterizan por una serie de parámetros (podéis ver la figura 8):

- Una impedancia característica Z_0 , que, siguiendo con el símil de la manguera, correspondería al efecto de tener una manguera más estrecha.
- Su longitud l , que, siguiendo con el símil de la cuerda, correspondería al efecto de la longitud de la cuerda.
- Un coeficiente de propagación β . Este parámetro nos define el comportamiento de la línea en función de las características de la onda que circula por ella. Como estamos hablando de transmitir una señal mediante dos conductores, estos tendrán unas características y unos comportamientos diferentes en función de la frecuencia de la señal.

β es la letra griega minúscula y se lee "beta".

Utilizando el símil de la cuerda, podéis pensar que si realizamos un movimiento muy leve, casi imperceptible, el mismo peso de la cuerda hará que no se propague ninguna señal. En cambio, si realizamos una señal muy brusca, es posible que la cuerda se rompa. Estos dos hechos dependen de la señal que queramos transmitir, pero también de las características propias de la cuerda.

Figura 8

**Figura 8**

Parámetros de las líneas de transmisión: longitud (l), impedancia característica (Z_0) y coeficiente de propagación (β).

Los parámetros que caracterizan una línea de transmisión son:

- Su longitud, l .
- Su impedancia característica, Z_0 .
- Su coeficiente de propagación, β .

Cabe señalar que, por lo que respecta a la representación, en un dibujo esquemático se pueden utilizar cualquiera de las representaciones físicas mostradas en la figura 8, ya que todas están formadas por los mismos elementos comentados en los puntos anteriores. La diferencia en su uso es puramente descriptiva o conceptual, ya que:

- podéis utilizar el diseño concéntrico en el caso de estar representando un circuito con una antena y un televisor (donde se utiliza un cable coaxial),
- o una línea bifilar en el caso de que diseñéis un circuito entre una emisora de radio y una antena dipolar,

pero los dos dibujos representarán dos líneas de transmisión que sólo se diferenciarán por sus parámetros, que son los que hemos visto en este subapartado.

Tal y como lo hemos presentado, las líneas de transmisión se utilizan como un dispositivo más en el diseño de circuitos eléctricos.

1.3. Señales dentro de las línea de transmisión

Ahora que ya hemos visto cómo son las líneas de transmisión y cuáles son sus parámetros característicos, nos centraremos en la señal que transmiten dentro de la línea.

Como hemos dicho, una fuente de alimentación V_g genera la señal. La fuente crea una diferencia de potencial entre sus polos que llamaremos $v(z,t)$ (podéis ver la figura 9). Esta señal se transmitirá a lo largo de toda la línea y sus características serán función de la posición, z , en la cual hacemos la medida dentro de la línea de transmisión, y del tiempo, t . Fijaos en que por ello lo representamos con $v(z,t)$: v representa la señal z y t , de la que depende la señal.

Podéis ver que la señal viene generada por una fuente de alimentación en el subapartado 1.2 de este módulo.

Esta medida es equivalente a medir la diferencia de potencial entre los dos conductores que forman la línea. En este caso utilizaremos la coma de superíndice para diferenciar las tensiones y las corrientes que hay en los polos de entrada y de salida de la línea.

Figura 9

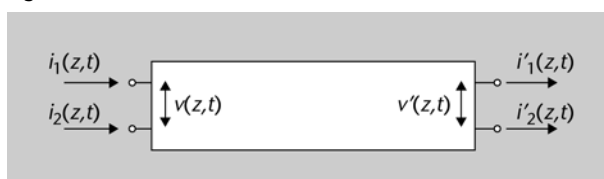


Figura 9

Corrientes i_1 e i_2 , y tensiones $v(z,t)$ y $v'(z,t)$, que circulan por los puertos de una línea de transmisión, todas ellas función de la posición dentro de la línea, z , y del tiempo, t .

Bien mirado, podéis pensar que es normal que la tensión pueda variar en función de la posición dentro de la línea. Recordad que si tenemos una cuerda, el movimiento que hemos hecho con el brazo irá propagándose a través de la cuerda y habrá una diferencia de posición entre los puntos donde haya perturbación respecto a los puntos donde la cuerda esté el reposo.

Eso lo podéis ver con el símil de las cuerdas atadas a la pared (figura 3). Tan pronto generamos una perturbación en una de las cuerdas y esta se propaga, la diferencia de posición entre dos puntos de las cuerdas que se encuentran en la nuestra misma distancia puede variar en función de:

- si la propagación está pasando por este punto en una de las cuerdas,
- si el punto de la cuerda se encuentra en reposo.

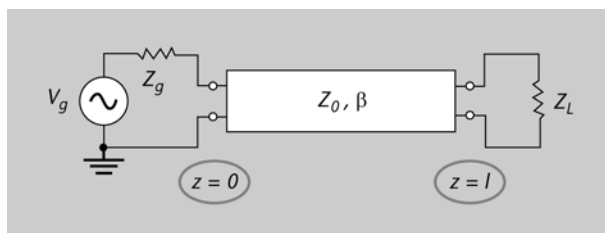
Como aplicaremos una diferencia de tensión en los polos de la línea de transmisión, por la ley de Ohm, tendremos una intensidad, o corriente, dentro de nuestra línea $i(z,t)$. Mediremos la intensidad entre los puertos de entrada y de salida de la línea. Igual que la tensión, la intensidad también dependerá de la posición de la línea en la que hacemos la medida, z , y del tiempo, t .

De esta manera mediremos las corrientes que circulan entre los dos polos del generador, que simbolizaremos $i_1(z,t)$ e $i_2(z,t)$. Utilizaremos el subíndice 1 para el polo superior en la entrada de la línea y el subíndice 2 para la corriente que circula por el polo inferior en la entrada de la línea (podéis ver la figura 9).

Para poder trabajar con las líneas de transmisión, hemos de definir el origen relativo y así poder localizar la posición de la onda sobre el eje horizontal, z . En el símil de las cuerdas, z es la distancia que hay entre nosotros y la posición donde hacemos la medida entre los dos puntos de las cuerdas.

En la mayoría de los casos situaremos el origen, el 0, de la línea de transmisión en el lado del puerto de entrada, y el extremo l en el puerto de salida, tal y como podéis ver en la figura 10.

Figura 10



Un vez hemos visto las características propias de las líneas de transmisión y de las señales que circulan por ellas, podemos pasar a definir bajo qué condiciones definiremos nuestro modelo de línea de transmisión.

1.4. Características del modelo de las líneas de transmisión

En este subapartado construiremos un modelo eléctrico de las líneas de transmisión con la intención de conocerlas con más detalle y ver cómo podemos obtener un circuito que nos sea comprensible.

Inicialmente estudiaremos las características de las líneas de transmisión desde un punto de vista de las propiedades de los elementos que las forman, los conductores.

Al hacer circular una corriente por el interior de dos conductores, estos experimentan una influencia mutua a causa de los campos eléctricos y magnéticos que se generan.

1.4.1. Hipótesis inicial: aproximación cuasiestática

Para este estudio de la influencia mutua utilizaremos lo que se denomina la *aproximación cuasiestática*.

La **aproximación cuasiestática** se basa en considerar un trozo muy pequeño de línea de transmisión y un intervalo de tiempo muy corto, y así poder hacer la aproximación que los valores de corriente y voltaje en la línea son constantes.

Recordad

Sin diferencia de potencial no se puede crear un campo eléctrico que desplace las cargas eléctricas y, por tanto, no se tiene ninguna corriente que circule dentro del circuito.

Figura 10

Posición del eje z sobre la línea de transmisión.

Criterio de signos

Más adelante en este mismo módulo veréis que cambiaremos el criterio de signos que aparece en la figura 10. Lo cambiaremos cuando estudiemos la onda que vuelve de la carga a la fuente, en lugar de estudiar la onda que va de la fuente a la carga, como hacemos ahora.

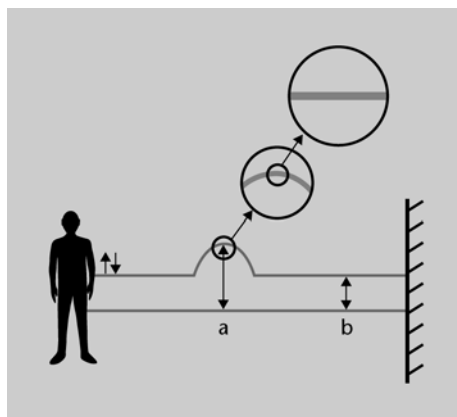
Observación

Eso es, precisamente, lo que sucede en los circuitos que hemos utilizado siempre, donde la longitud de onda es mucho más larga que el circuito y, por tanto, la diferencia de potencial entre dos puntos de la línea no varía con el tiempo.

A partir de las propiedades obtenidas de la aproximación cuasiestática, diseñaremos un circuito eléctrico con propiedades equivalentes a las de las líneas de transmisión.

Podéis imaginar la aproximación cuasiestática como si tomaseis un trozo muy pequeño de una cuerda donde hay una señal propagándose en un instante concreto. Si tomáis un trozo pequeño de la cresta de la onda, parecerá que la cuerda sea recta (podéis ver la figura 11) y, al elegir un instante de tiempo concreto, parecerá que no hay propagación.

Figura 11

**Figura 11**

Diferencial de cuerda donde, para un trozo muy pequeño, la cresta de la propagación parece que sea recta.

La aproximación cuasiestática nos sirve para entender la importancia de la longitud de la línea de transmisión respecto a la longitud de la onda. Si la onda que circula tiene una longitud de onda muy grande, o la línea es muy pequeña, parecerá que no hay onda y que la tensión y la corriente sean constantes a lo largo de la línea.

Podéis ver la importancia de la longitud de la línea de transmisión respecto a la longitud de onda en el subapartado 1.1 de este módulo.

1.4.2. Campos eléctricos y magnéticos entre conductores

Comenzaremos analizando el comportamiento de la línea de transmisión. Para hacerlo, la descompondremos en secciones elementales de longitud muy pequeña, que las denominaremos diferenciales de longitud, dz .

dz se lee “diferencial de zeta”.

Lo que haremos con la aproximación cuasiestática es tomar trozos muy pequeños de la cuerda para que sea fácil de estudiar sus propiedades y después los juntaremos todos para crear nuestro modelo de línea de transmisión.

Podemos volver al símil de la cuerda; si tomamos un trozo muy pequeño, podemos ver los nudos y cómo están entreligados y, a partir de aquí, aproximar un valor característico como la densidad, la rigidez o la flexibilidad. De manera parecida queremos ver el comportamiento de una “rodaja” muy fina de una línea de transmisión. Podéis ver un ejemplo de una “rodaja” o sección transversal (elemental) de una línea de transmisión coaxial en la figura 12, donde podéis observar el dieléctrico y los dos conductores.

Figura 12

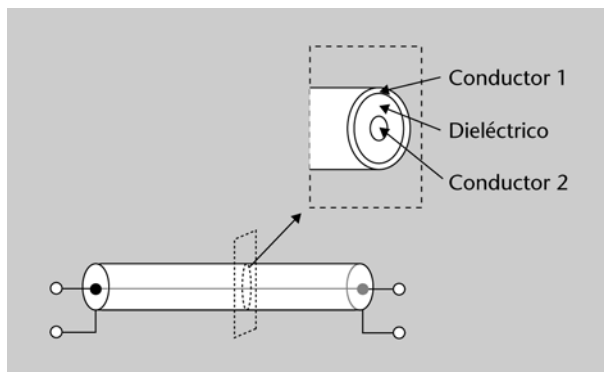


Figura 12

Sección transversal (o elemental) de una línea de transmisión coaxial donde podéis ver el conductor 1 externo, el conductor 2 interno y el dieléctrico que los separa.

Para encontrar un modelo de línea de transmisión que sea útil y que tenga unas propiedades tan parecidas como sea posible a la realidad, pero que, al mismo tiempo, no sea de difícil utilización, hay que hacer unas hipótesis iniciales.

Plantaremos las hipótesis siguientes entre dos porciones de la línea, o secciones elementales, que se encuentran dentro del mismo plano transversal:

1) Las líneas de campo eléctrico que se crean entre los conductores de las dos secciones (a causa de la diferencia de potencial) están contenidas en planos transversales, es decir, no hay componente axial del campo eléctrico. En la figura 13 podéis ver un ejemplo de lo que queremos decir sobre una línea de transmisión bifilar; las líneas de campo están dentro del plano transversal y no hay líneas de campo en la dirección perpendicular al plano.

Si recordáis el módulo de ondas, la onda electromagnética es una onda transversal, ya que las componentes de los campos eléctrico y magnético están orientadas en planos perpendiculares a la dirección de propagación. Para definir nuestro modelo de línea de transmisión, utilizaremos campos electromagnéticos del tipo transversal, lo que conocemos como un modo transversal electromagnético (TEM), en el que el campo eléctrico y el campo magnético totales son perpendiculares a la dirección de propagación. Si la onda se desplaza en la dirección z corresponde a $E_z = 0$ y $B_z = 0$.

Las ondas que circulan entre los dos conductores son ejemplos de ondas TEM. Este modo es el modo de propagación dominante cuando la sección transversal de la línea de transmisión es pequeña en relación con la longitud de la onda de la señal (como es nuestro caso), es decir, la longitud de onda de la señal es mucho más grande que la sección transversal de la línea.

Podemos aplicar lo mismo a las líneas de campo entre dos conductores en configuración concéntrica.

2) No hay líneas de campo magnético entre los conductores de dos secciones elementales del mismo plano transversal (como podría suceder en la figura

Plano transversal

El plano transversal es el plano perpendicular a los conductores que contiene dos secciones elementales de los conductores que forman la línea de transmisión. Generalmente estas secciones elementales serán paralelas y estarán situadas en la misma posición, z .

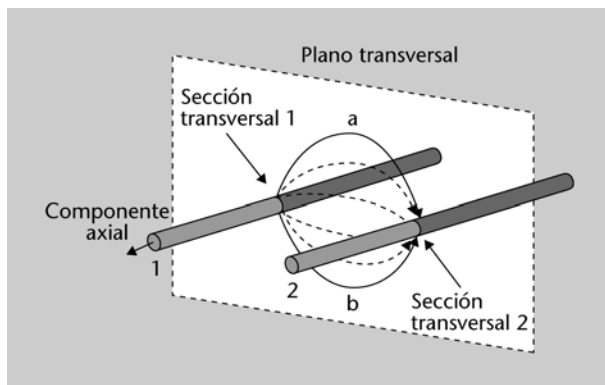
Podéis ver las líneas de transmisión bifilares en el subapartado 1.2.2 de este módulo.

Modo TE y modo TM

En el módulo "Ondas" habéis visto los modos transversal eléctrico (TE), en el que $E_z = 0$, y transversal magnético (TM), en el que $B_z = 0$.

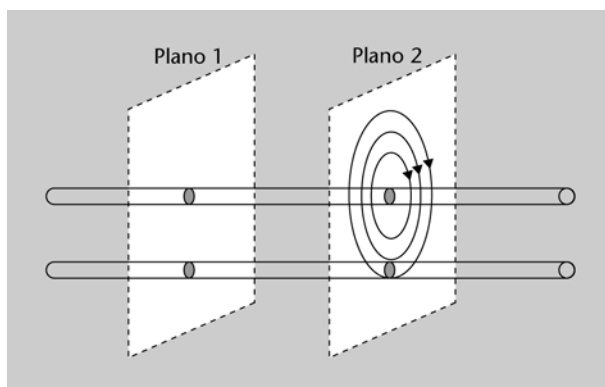
13). En la figura 14 podéis ver que el campo magnético solo afecta a secciones elementales que están contenidas dentro del mismo plano transversal (igual que en la hipótesis 1, pero aplicada al campo magnético).

Figura 13

**Figura 13**

Líneas de campo eléctrico *a* y *b* entre los conductores de dos secciones elementales en un mismo plano transversal que cruza los dos conductores 1 y 2, de una línea bifilar.

Figura 14

**Figura 14**

Interacción del campo magnético entre secciones elementales dentro de un mismo plano transversal.

El resumen de las dos hipótesis es que centraremos el desarrollo del modelo de la línea de transmisión en los efectos (eléctricos y magnéticos) entre secciones elementales que se encuentren dentro del mismo plano transversal.

1.5. Modelo de línea de transmisión

Las aproximaciones del subapartado anterior nos permitirán realizar un modelo para las líneas de transmisión, utilizando básicamente elementos discretos (como resistencias, condensadores, bobinas, etc.) y centrándonos en las propiedades de los conductores.

Todos los conductores tienen unas ciertas características inherentes al material que lo constituye, como la conductividad (o su contrario, la resistividad) y otras propiedades físicas en las que ahora no entraremos, que provocan unos

efectos entre las secciones transversales que hay en un mismo plano transversal. En la figura 15 tenéis representado el modelo de línea de transmisión de una sección elemental de la que hablábamos en el subapartado anterior.

Con las hipótesis realizadas en el subapartado anterior, el potencial $v(z,t)$ y la corriente $i(z,t)$ que circula por una sección elemental sólo están afectadas por:

- Una cierta resistencia por unidad de longitud provocada por el mismo material del conductor, que se representa en la figura 15 con $R'dz$.
- Una conductancia por unidad de longitud, que representa el aislamiento entre los dos conductores a causa del dieléctrico. Aparece en la figura 15 como $G'dz$.
- Una capacidad por unidad de longitud entre los conductores. Esta capacidad se debe al hecho de tener dos conductores a una cierta distancia con un dieléctrico (en el caso de líneas de transmisión bifilares el aire actúa como un dieléctrico) o un aislante (en el caso de las líneas coaxiales) entre ambos, que forman un condensador. Esta capacidad se crea entre los dos conductores y la podéis ver representada en la figura 15 como $C'dz$.
- Un coeficiente de autoinducción o, lo que es lo mismo, una bobina dispuesta en uno de los conductores a causa del campo magnético creado por las cargas en movimiento dentro de los conductores, que podéis ver en la figura 15 como $L'dz$.

Podéis ver las líneas de transmisión bifilares en el subapartado 1.2 de este módulo.

En la figura 15, L' y C' representan la inductancia y la capacidad de la línea de transmisión por unidad de longitud, y sus unidades son henrios por metro (H/m) y faradios por metro (F/m), respectivamente. Recordad que estamos analizando un elemento muy pequeño de la línea; por tanto, la capacidad total del segmento es la densidad lineal de capacidad por la longitud del segmento, $C'dz$, y la inductancia total es la densidad lineal de inductancia por la misma longitud, $L'dz$.

Lo mismo sucede para la resistencia por unidad de longitud R' y la conductancia por unidad de longitud G' . Estos elementos tienen unidades de ohms por metro (Ω/m) y de siemens por metro (S/m). Los parámetros de $R'dz$ y $G'dz$ son los parámetros que simulan los efectos disipados, o de atenuación, de nuestro modelo de línea de transmisión.

Nota

El siemens, S, es la unidad de conductancia y corresponde al contrario del ohm:

$$1 \text{ S} = 1 \text{ } \Omega^{-1}$$

De esta manera obtenemos, para una sección elemental de longitud dz , el circuito equivalente de la figura 15.

Figura 15

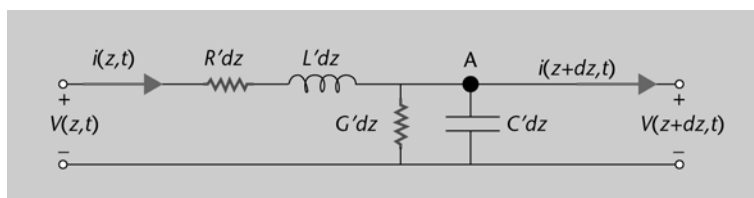


Figura 15

Modelo o circuito equivalente de una sección infinitesimal de una línea de transmisión donde se presenta una resistencia $R'dz$, una capacidad $C'dz$, una conductancia $G'dz$ y una inductancia $L'dz$.

Con tal de poder analizar el circuito de la figura 15 con más detalle, hemos de descomponerlo en diferentes subcircuitos y aplicar las leyes de Kirchhoff.

Leyes de Kirchhoff

La primera ley de Kirchhoff, o **ley de Kirchhoff de las corrientes**, afirma que la suma algebraica de las intensidades que entran en un nodo es nula en cualquier instante de tiempo.

La segunda ley de Kirchhoff, o **ley de Kirchhoff de las tensiones**, señala que la suma algebraica de las tensiones en una malla del circuito es cero.

La utilización de elementos como la bobina y el condensador implica que las corrientes y las tensiones en la entrada de la línea, $i(z,t)$ y $v(z,t)$, y a la salida de la línea, $i(z+dz,t)$ y $v(z+dz,t)$, varían en función del tiempo.

Por ello, en los siguientes puntos analizaremos cómo varían la corriente y la tensión para encontrar las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del circuito.

a) Corriente de entrada de la línea

Tal y como podéis ver en la figura 16, la corriente $i(z,t)$ que entra por el polo positivo de la línea de transmisión atravesará la resistencia $R'dz$ y la bobina $L'dz$ y llegará al nodo A de la figura 16 sin haber cambiado su intensidad $i(z,t)$, ya que no tenemos ninguna rama que distribuya la corriente.

Figura 16

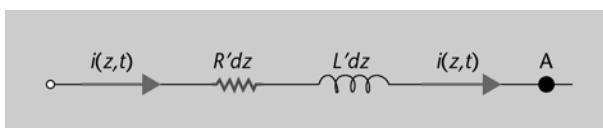


Figura 16

Conservación de la corriente de entrada en la línea que llega al nodo A.

b) Corriente de salida de la línea

Ahora buscaremos la expresión de la corriente en los conectores de salida de la línea de transmisión.

Al nodo A llega una corriente $i(z,t)$ y sale una corriente $i(z+dz,t)$. La diferencia entre estas dos corrientes, por la primera ley de Kirchhoff, ha de ser igual a las corrientes que circularán por la conductancia y por el condensador que veis en la figura 17. Así, podemos obtener las ecuaciones (1) y (2) de intensidad para cada rama i_1 e i_2 .

Figura 17

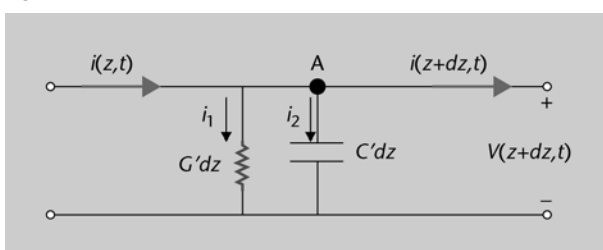


Figura 17

Corrientes que circulan por la conductancia y la capacidad.

Dado que no sabemos los valores exactos de las corrientes i_1 e i_2 , lo que podemos hacer es calcularlos a partir de la diferencia de potencial entre los polos de salida de la línea de transmisión $v(z+dz, t)$. Así, la corriente i_1 que circula por la conductancia $G'dz$ viene dada por la siguiente ecuación:

$$i_1 = G'dz \cdot v(z + dz, t) \quad (1)$$

Y la corriente i_2 que circula por un condensador sometido a una diferencia de potencial viene dado por la ecuación:

$$i_2 = C'dz \cdot \frac{\partial v(z + dz, t)}{\partial t} \quad (2)$$

Utilizando la primera ley de Kirchhoff sobre el nodo A de la figura 17 obtenemos la ecuación de las corrientes:

$$i(z + dz, t) + i_1 + i_2 - i(z, t) = 0 \quad (3)$$

Si partimos de la ecuación (3) y sustituimos por sus valores las ecuaciones (1) y (2), tenemos:

$$i(z + dz, t) + G'dz \cdot v(z + dz, t) + C'dz \frac{\partial v(z + dz, t)}{\partial t} - i(z, t) = 0 \quad (4)$$

Si ahora dividimos la ecuación (4) por dz , podéis llegar a la siguiente ecuación:

$$\left[\frac{i(z + dz, t) - i(z, t)}{dz} \right] + G'v(z + dz, t) + C' \frac{\partial v(z + dz, t)}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Podemos interpretar la ecuación (5) como que cualquier variación en la corriente que circula por la línea se debe a la capacidad distribuida C' multiplicada por la variación de tensión en el tiempo, y a la conductividad distribuida, G' , multiplicada por la tensión.

Si ahora hacemos el límite de $dz \rightarrow 0$, el primer término de la ecuación (5), entre corchetes, pasa a ser una ecuación diferencial y obtenemos:

$$\left. \frac{i(z + dz, t) - i(z, t)}{dz} \right|_{dz \rightarrow 0} \approx \frac{\partial i(z, t)}{\partial z} \quad (6)$$

Si sustituimos la expresión del diferencial, ecuación (6), en el primer y último término de la ecuación (5), obtendremos:

$$\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} + G'v(z, t) + C' \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

donde hemos aplicado que $dz \rightarrow 0$.

Recordad

La ley de Ohm dice que el voltaje (v) es igual a la intensidad (i) por la resistencia (R): $v = Ri$. La conductancia (G) es el inverso de R y, por tanto: $i = Gv$.

Recordad

La intensidad i que atraviesa un condensador de capacidad C es:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

donde v es el voltaje en los extremos del condensador.

Derivada parcial

El símbolo $\frac{\partial}{\partial t}$ significa que lo que estamos haciendo es una derivada parcial. Utilizamos la derivada parcial en lugar de la derivada normal, $\frac{d}{dt}$, ya que las funciones de corriente, $i(z, t)$, y tensión, $v(z, t)$, son funciones de más de una variable, z y t , y nosotros hacemos la derivada solo respecto a una de ellas, la t .

Así, hemos obtenido la ecuación diferencial de la corriente, $i(z,t)$, en función del tiempo y de la posición en la línea.

c) Tensión de entrada de la línea

Si ahora aplicamos la segunda ley de Kirchhoff a las mallas que están en el lado izquierdo del nodo A (podéis ver la figura 18):

Figura 18

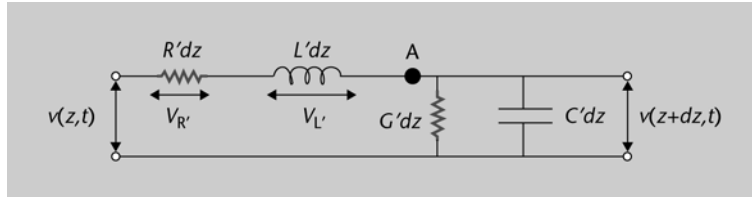


Figura 18

Modelo equivalente de una línea de transmisión con las caídas de tensión en cada malla.

podemos obtener una ecuación similar a la ecuación (5) para las tensiones, $v(z,t)$:

$$v(z,t) - v_{R'} - v_{L'} - v(z+dz,t) = 0 \quad (8)$$

donde

$$v_{R'} = R' \cdot i(z,t) \quad (9)$$

$$v_{L'} = L' \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad (10)$$

Recordad

El voltaje v que cae en los extremos de una bobina de autoinductancia L es:

$$v = L \frac{di}{dt}$$

donde i es la intensidad.

d) Tensión de salida de la línea

La tensión en la salida de la malla es la misma que la tensión en la entrada de la malla y, por tanto, la caída de tensión en la conductancia será la misma que la caída de tensión en el condensador.

Igual que en el caso de las corrientes, si sustituimos las ecuaciones (9) y (10) dentro de la ecuación (8) podemos obtener una ecuación parecida a la ecuación (5) para las tensiones del circuito. Por lo tanto, sólo nos falta dividir todas las ecuaciones por dz :

$$\left[\frac{v(z+dz,t) - v(z,t)}{dz} \right] + R' i(z,t) + L' \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

donde el último término representa la tensión que cae en la bobina. Podemos interpretar la ecuación (11) como que en cualquier punto z de la línea, cualquier diferencial en la tensión se debe a la inductancia distribuida de la línea, L' , multiplicada por la variación en el tiempo de la corriente y a la resistencia distribuida de R' multiplicada por la intensidad.

Si hacemos $dz \rightarrow 0$, como hemos hecho con la intensidad, de la ecuación (11) podemos obtener la ecuación diferencial para la tensión:

$$\frac{\partial v(z,t)}{\partial z} + R' i(z,t) + L' \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

1.6. Ecuaciones de onda en una dimensión o ecuaciones del telegrafista

Las ecuaciones diferenciales (7) y (12) nos describen cómo cambian las tensiones y las corrientes en nuestro modelo de línea de transmisión. Si podemos encontrar unas funciones $i(z,t)$ y $v(z,t)$ que cumplan las condiciones de las ecuaciones diferenciales (7) y (12), deberemos encontrar las funciones de las ondas de corriente y tensión.

No lo demostraremos aquí, pero si estamos en régimen permanente sinusoidal, a partir de las ecuaciones (7) y (12) podemos obtener la ecuación de ondas en una dimensión para la tensión, $v(z,t)$,

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} - \gamma^2 v(z,t) = 0 \quad (13)$$

Y para la corriente, $i(z,t)$,

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} - \gamma^2 i(z,t) = 0 \quad (14)$$

donde γ se denomina **constante de propagación** de la línea de transmisión y se define de la siguiente manera:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad (15)$$

donde α se denomina **constante de atenuación** y representa el factor de atenuación causado por los conductores de la línea de transmisión y β se denomina **constante de fase** o de propagación de la onda. ω es la **frecuencia angular** de la onda que circula por la línea.

Estas ecuaciones se conocen con el nombre de **ecuaciones del telegrafista**.

La solución más general a la ecuación de ondas para la tensión y la corriente es:

$$v(z,t) = V^+ e^{(j\omega t - \gamma z)} + V^- e^{(j\omega t + \gamma z)} \quad (16)$$

$$i(z,t) = I^+ e^{(j\omega t - \gamma z)} + I^- e^{(j\omega t + \gamma z)} \quad (17)$$

Podéis ver el subapartado 2.2.3 del módulo "Ondas".

Ecuación de ondas

Fijaos en que tanto la ecuación (14) como la (15) son del estilo de la ecuación de propagación de una onda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - k^2 u = 0$$

donde tenemos la derivada segunda de una función, u , respecto al espacio, z , igual a una constante de propagación, k , multiplicada por la misma función.

La letra α es la letra griega alfa minúscula y se lee "alfa".

La letra γ es la letra griega gamma minúscula y se lee "gamma".

La letra ω es la letra griega omega minúscula y se lee "omega".

donde V^- , V^+ , I^- y I^+ representan las amplitudes de las ondas, y las siguientes ecuaciones:

$$v^+ = V^+ e^{j\omega t - \gamma z} \quad (18)$$

$$i^+ = I^+ e^{j\omega t - \gamma z} \quad (19)$$

representan una onda de tensión, v^+ , y una onda de corriente, i^+ , que se propagan en el sentido de las z crecientes, o del generador hacia la carga. A estas ondas las denominaremos **ondas progresivas**.

De la misma manera, hablamos de ondas que se propagan en el sentido de las z decrecientes, o de la carga hacia el generador, en las ecuaciones siguientes:

$$v^- = V^- e^{j\omega t + \gamma z} \quad (20)$$

$$i^- = I^- e^{j\omega t + \gamma z} \quad (21)$$

que denominaremos **ondas regresivas**. Estas ondas regresivas se generan cuando la onda progresiva se refleja en la carga.

Las ondas progresivas se propagan desde la fuente en dirección a la carga y las regresivas se propagan desde la carga hacia la fuente (fijaos en el signo de γz).

Para simplificar...

Para simplificar, tomaremos la velocidad de la luz en el vacío, c , como la velocidad de propagación de las ondas de tensión y de corriente para el interior del conductor.

Las ecuaciones (16) y (17) nos muestran que en cualquier punto de la línea de transmisión, z , y en cualquier instante, t , la tensión y la corriente medidas son la suma de los valores de las dos ondas correspondientes (progresiva y regresiva).

Así, todos los puntos de la línea de transmisión experimentan la misma variación en función del tiempo, el factor $j\omega t$, pero con un retraso debido a la posición, el factor γz , que será más grande cuanto mayor sea la distancia con el origen en el eje z .

1.6.1. Impedancia característica

Una vez definidas las ondas que circulan por la línea de transmisión, ya podemos deducir alguna propiedad más de estas utilizando leyes básicas, como la ley de Ohm, y jugando un poco con las ecuaciones deducidas hasta este punto.

Si introducimos las ondas progresivas de las ecuaciones (18) y (19) dentro de las ecuaciones diferenciales de la tensión, ecuación (7), y de corriente, ecuación (12), obtenemos (no es necesario realizar el desarrollo paso a paso, ya que sólo nos interesa el resultado final):

$$\frac{\partial v^+}{\partial z} = -(R' + j\omega L') \cdot i^+(z) \quad ; \quad \frac{\partial v^+}{\partial z} = -Z \cdot i^+(z) \quad (22)$$

$$\frac{\partial i^+}{\partial z} = -(G' + j\omega C') \cdot v^+(z) \quad ; \quad \frac{\partial i^+}{\partial z} = -Y \cdot v^+(z) \quad (23)$$

Cabe señalar que para la onda regresiva obtendréis el mismo resultado.

Observad que en las ecuaciones (22) y (23) la derivada de la onda progresiva de tensión, $v^+(z)$, y de corriente, $i^+(z)$, son iguales al otro componente multiplicadas por un factor. Estos factores son la impedancia Z y la admitancia Y . La admitancia tiene unidades de inversa de impedancia:

$$[Y] = \frac{1}{[Z]} \quad (24)$$

Tal como acabamos de decir, la relación entre la corriente y la tensión en un circuito se produce, según la ley de Ohm, por la impedancia.

$$v = Z \cdot i \quad \rightarrow \quad \frac{v}{i} = Z \quad (25)$$

Utilizando esta relación, sustituyendo las ecuaciones (18) y (19) en (22) y (23) llegamos a:

$$\frac{v^+}{i^+} = \frac{V^+}{I^+} = Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (26)$$

de donde obtenemos Z_0 , que es la **impedancia característica** de la línea de transmisión en función de sus parámetros distribuidos.

Definimos la **impedancia característica** de una línea de transmisión, Z_0 , como la impedancia equivalente debida a las propiedades características de los conductores que forman la línea. Su unidad de medida es el ohm, que se representa con la letra Ω . Esta es la impedancia equivalente que “verá” una fuente conectada en los bornes de entrada de la línea de transmisión.

Observad que al aplicar la solución de la onda de tensión y de corriente, ecuaciones (16) y (17), a la ecuación (23), la onda de corriente regresiva, i^- , tiene el signo cambiado respecto a la onda de tensión regresiva, v^- . A partir de la onda de corriente regresiva, (21), encontramos:

$$\frac{\partial i^-}{\partial z} = I^- \gamma e^{(j\omega t + \gamma z)} = \gamma i^- \quad (27)$$

Z

En este caso Z representa una impedancia cualquiera formada por las componentes resistiva e inductiva del modelo de línea de transmisión. Más adelante utilizaremos Z_0 como la impedancia característica de la línea de transmisión.

Recordad

La notación [] indica que nos estamos refiriendo a las unidades.

Ley de Ohm

La ley de Ohm nos dice que la caída de tensión, v , es proporcional a la corriente, i , que pasa por una impedancia, Z .

La letra Ω es la letra griega omega mayúscula y se lee “omega”.

Impedancias características variables

Más adelante (en el subapartado 3.2) veréis que, cuando la carga no está adaptada, la impedancia característica de la línea varía a medida que las ondas circulan dentro de la línea de transmisión. Esto se debe a las reflexiones de la onda progresiva en la carga.

Multiplicando y dividiendo por Z_0 y utilizando (15), (20) y (26) encontramos:

$$\frac{\partial i^-}{\partial z} = \gamma i^- = I^- \cdot Z_0 \frac{\gamma}{Z_0} e^{j(\omega t + \gamma z)} = (G' + j\omega C') v^- = Y v^- \quad (28)$$

Que es como la ecuación 23, pero cambiada de signo.

De donde, dado que la ecuación (25) continúa siendo válida.

$$i^- = -\frac{v^-}{Z_0} \quad (28b)$$

Esto se debe al hecho de que, al hacer la derivada de la onda de corriente regresiva, i^- , respecto a z , la solución tiene el signo cambiado respecto a la onda progresiva.

1.6.2. Aproximación a líneas de transmisión ideales

Hasta aquí hemos estado trabajando con el modelo completo, utilizando todos los parámetros, de las líneas de transmisión.

A partir de ahora utilizaremos la aproximación de líneas de transmisión sin pérdidas, por lo que tendremos:

- $R' = 0$. Consideraremos que la resistencia distribuida del diferencial de línea es muy pequeña, ya que para una parte de conductor muy reducida, la diferencia de tensión entre sus extremos debe ser cero.
- $G' = 0$. Consideraremos que la conductancia es cero y, por tanto, que la resistencia es infinita o, lo que es lo mismo, que tenemos un circuito abierto en este punto. Al anular la conductancia lo que estamos haciendo es eliminar los posibles contactos que pueda haber entre los dos conductores.

Si aplicamos estas aproximaciones a la ecuación (26), obtenemos la impedancia característica de una línea de transmisión ideal:

$$\sqrt{\frac{L'}{C'}} = Z_0 \quad (29)$$

La aproximación de línea de transmisión sin pérdidas se define por $R' = 0$ y $G' = 0$, y deja sólo los efectos de inducción, L' , y de capacidad, C' , entre los conductores.

Las expresiones de la tensión, v , y de la corriente, i , no se ven afectadas por la aproximación de línea de transmisión ideal, de manera que cuando tenemos una onda progresiva y otra regresiva en cualquier punto de la línea de transmisión, las podemos calcular a partir de las ecuaciones siguientes:

$$v = v^+ + v^- \quad (30)$$

$$i = i^+ + i^- = \frac{1}{Z_0}(v^+ - v^-) \quad (31)$$

Nota

Observad que las ecuaciones (30) y (31) dicen lo mismo que las ecuaciones (16), combinada con (28) y (29), y (17), combinada con (20), (21) y (26).

En las ecuaciones (30) y (31) vemos que la tensión en cualquier punto de la línea, v , es la suma de las tensiones de las ondas progresiva v^+ y regresiva v^- . Lo mismo se puede aplicar a la corriente que circula por la línea, i (podéis ver las ecuaciones 25 y 31).

Observad que en la segunda igualdad de la ecuación (31) hemos utilizado la ecuación (28b), por lo que la intensidad total será el resto de las ondas de tensión progresiva y regresiva, con el factor de la impedancia dividiendo.

Ejemplo de comparación de líneas con pérdidas y líneas sin pérdidas

Dada una línea de transmisión por la que circula una señal de frecuencia $f = 330$ MHz, con los siguientes parámetros: $L' = 0,3$ $\mu\text{H/m}$, $R' = 75$ Ω/m , $G' = 0,01$ S/m y $C' = 450$ pF/m; calcularemos su impedancia característica, Z_0 , en los casos de tener líneas con pérdidas y líneas sin pérdidas (líneas ideales).

Solución

En el caso de las líneas de transmisión con pérdidas, utilizaremos la ecuación (26) para calcular la impedancia característica de la línea:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{75 + j330 \cdot 10^{+6} \cdot 2\pi \cdot 0,3 \cdot 10^{-6}}{0,01 + j330 \cdot 10^{+6} \cdot 2\pi \cdot 450 \cdot 10^{-12}}} = \sqrt{\frac{75 + j622}{0,01 + j0,933}} \quad (32)$$

Para encontrar la solución a la raíz de la ecuación (32) podemos multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador. De esta manera obtendremos:

$$Z_0 = \sqrt{0,667 - j73,23} = 25,9 - j1,4 \Omega \quad (33)$$

Y utilizamos la ecuación (15) para el cálculo de la constante de propagación:

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \\ &= \sqrt{(75 + j330 \cdot 10^{+6} \cdot 2\pi \cdot 0,3 \cdot 10^{-6})(0,01 + j330 \cdot 10^{+6} \cdot 2\pi \cdot 450 \cdot 10^{-12})} = \\ &= \sqrt{-579,6 + j76,2} = 1,58 + j24,1 \end{aligned} \quad (34)$$

Ahora podemos utilizar la ecuación (29) para calcular la impedancia característica en el caso de líneas de transmisión ideales. Si aplicamos el valor, obtendremos:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{0,3 \cdot 10^{-6}}{455 \cdot 10^{-12}}} = 25,82 \Omega \quad (35)$$

En el caso de líneas ideales, el cálculo de la constante de propagación se reduce a:

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{L'C'} = 24,09j \text{ rad/m} \quad (36)$$

Como veis en los resultados de las ecuaciones (33) y (35), el módulo de Z_0 es prácticamente el mismo, considerando línea sin pérdidas; por tanto, podemos utilizar esta aproximación.

1.7. Coeficiente de reflexión

En el subapartado anterior hemos definido las ondas progresivas, aquellas que van de la fuente a la carga, y las regresivas, aquellas que se reflejan en la carga y vuelven la fuente.

En este subapartado veremos cómo se crea la onda regresiva en función de la carga que tengamos conectada a la línea de transmisión y de la onda progresiva que incide en esta. El coeficiente que relaciona las ondas regresivas y las progresivas nos permitirá, más tarde, optimizar la transmisión de la potencia.

Observad el circuito de la figura 19, en el que tenemos un generador de tensión $V_g(t)$ con una resistencia interna Z_g , conectado a una línea de transmisión de longitud l y una impedancia de carga Z_L .

Figura 19

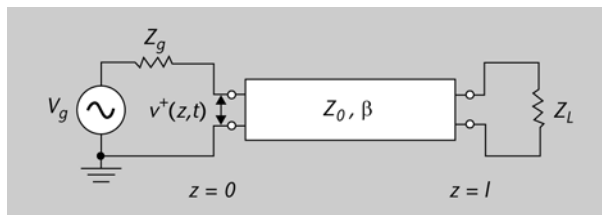


Figura 19

Circuito con una línea de transmisión de impedancia característica Z_0 y una carga Z_L .

¿Recordáis que el fundamento del funcionamiento de las líneas de transmisión se basa en el retardo de las ondas que circulan por aquellas? Pues bien, ahora analizaremos el circuito de la figura 19 a partir del estado inicial: cuando el generador ha creado la señal que se debe transmitir y este entra en los conectores de entrada de la línea. En este instante inicial el tiempo será $t = 0$ y la onda se encontrará en la posición $z = 0$.

Para calcular el valor de la tensión en la entrada de la línea de transmisión v^+ , hay que aplicar un divisor de tensión entre la tensión generada por el generador V_g y el circuito equivalente a su entrada, en $z = 0$. Este circuito equivalente está formado por la resistencia del generador, Z_g , y la línea de transmisión, con una impedancia de valor constante Z_0 . Recordad que Z_0 es la impedancia equivalente que “verá” una fuente conectada a los bornes de entrada de la línea de transmisión.

Con el divisor de tensión entre ambos circuitos obtenemos:

$$v^+(z,t) \Big|_{z=0,t=0} = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} V_g \quad (37)$$

Si calculamos el coeficiente entre la tensión en la entrada de la línea, v^+ , y la intensidad que circulará por la línea de transmisión, i^+ , obtendremos su impedancia de entrada.

Observación

Aunque a partir de ahora dibujaremos los circuitos con el generador y su impedancia, a nosotros sólo nos interesa la parte del circuito de la línea de transmisión y la carga conectada al circuito.

No entra dentro del alcance de este módulo cómo funciona el generador ni cómo se genera la onda inicial, o progresiva.

Podéis ver qué es la impedancia equivalente Z_0 en el subapartado 1.6.1 de este módulo.

$$\frac{v^+}{i^+} = Z_0 \quad (38)$$

En la ecuación (38) podéis ver que el cociente entre la tensión y la corriente es Z_0 (recordad la ecuación (26)) y la línea presenta, por tanto, una impedancia de entrada igual a Z_0 .

Recordad que nos encontramos en el instante inicial en el que el generador suministra la corriente al circuito, el tiempo es cero, $t = 0$, y por ello la ecuación (37) no depende del tiempo.

En este instante $t = 0$ es cuando el retardo en la propagación de las ondas dentro de las líneas de transmisión comienza a tener relevancia. En este instante la onda está en la entrada de la línea, en $z = 0$, por lo que aún no ha recorrido la línea y no ha llegado a la carga. En este punto, la impedancia de entrada de la línea es la impedancia que podríamos medir en la salida del generador o, lo que es lo mismo, en la entrada de la línea de transmisión.

Dado que la onda ya ha llegado a los conectores de entrada de la línea de transmisión, parece que la onda aún no haya “visto” la carga. En la figura 20 podéis ver el circuito equivalente para $t = 0$ en $z = 0$.

Recordad

Las líneas de transmisión basan su funcionamiento en el retardo en la propagación de las ondas dentro de la línea.

Figura 20

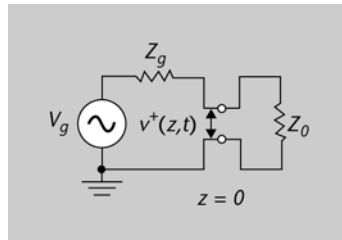


Figura 20

Circuito equivalente del circuito de la figura 19 para $t = 0$ y $z = 0$. En el momento inicial la onda progresiva se encuentra en la entrada de la línea, por lo que no “ve” la carga.

Pasemos ahora a observar el cálculo desde otro punto de vista: desde el punto de vista de la carga. Aplicando las ecuaciones (30) y (31) podemos calcular el valor de la impedancia de salida de la línea en la posición $z = l$ y, una vez la onda progresiva ha llegado a la carga, aplicando la ley de Ohm, tenemos:

$$Z_L = \frac{v(l,t)}{i(l,t)} = Z_0 \frac{v^+ + v^-}{v^+ - v^-} \quad (39)$$

Donde hemos utilizado (30) y (31). Si de la ecuación (39) aislamos la relación entre v^- y v^+ , obtendremos un parámetro muy importante a la hora de calcular la relación de proporcionalidad entre la onda regresiva y la onda progresiva. Así, para obtener la relación entre la onda regresiva, v^- , y la onda progresiva, v^+ , partimos de (39), que volvemos a escribir sin el término intermedio:

$$Z_L = Z_0 \frac{v^+ + v^-}{v^+ - v^-} \quad (40)$$

Ahora pasamos el denominador de la segunda parte de la ecuación (40) al lado izquierdo de la igualdad y así obtenemos:

$$Z_L(v^+ - v^-) = Z_0(v^+ + v^-) \quad (41)$$

Si entonces multiplicamos los factores comunes de cada paréntesis, obtenemos:

$$Z_L v^+ - Z_L v^- = Z_0 v^+ + Z_0 v^- \quad (42)$$

De manera que solo necesitamos pasar a cada lado de la igualdad los factores de las ondas progresivas, v^+ , a la izquierda, y de las ondas regresivas, v^- , a la derecha. Así obtendremos:

$$Z_L v^+ - Z_0 v^+ = Z_0 v^- + Z_L v^- \quad (43)$$

Y si volvemos a extraer como factor común las ondas progresivas y regresivas, obtenemos:

$$v^+(Z_L - Z_0) = v^-(Z_0 + Z_L) \quad (44)$$

Pasando los elementos multiplicadores comunes a un lado y los dos paréntesis al otro, llegamos a:

$$\frac{v^-}{v^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = -\frac{i^-}{i^+} = \rho_L \quad (45)$$

Es decir, en la resistencia de carga, Z_L , la onda regresiva está relacionada con la onda progresiva mediante un factor de proporcionalidad ρ_L que denominaremos **coeficiente de reflexión en la carga**.

La letra ρ es la letra griega rho minúscula y se lee "ro".

Recordad que en el inicio del módulo hemos dicho que nos interesa caracterizar las líneas en función de su capacidad de transmitir toda la señal que llevan hacia la carga. Pues bien:

El **coeficiente de reflexión en la carga**, ρ_L , es el parámetro que nos indica qué porcentaje (o porción) de la onda incidente NO es consumida, o utilizada, por la carga y es devuelta a la fuente en forma de onda regresiva.

$$\rho_L = \frac{v^-}{v^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (46)$$

Nota

A veces, en lugar de ρ se emplea la letra Γ (gamma mayúscula).

Hay que recalcar que este coeficiente lo calculamos cuando la onda progresiva, v^+ , ha llegado a la carga, a la posición $z = l$. Entonces es cuando se genera la onda regresiva, v^- , en función del valor de la carga Z_L .

Si tenemos en cuenta que los valores de las ondas varían en función de z y t (recordad las ecuaciones (16) y (17)), resulta que el valor del coeficiente de transmisión ρ puede ir variando a lo largo de la línea de transmisión. Más adelante detallaremos este punto.

Ahora que tenemos la expresión del coeficiente de reflexión en la carga, podemos estudiar un poco todos los casos posibles para cualquier valor de la impedancia de carga que podemos poner en el circuito de la figura 19.

1.8. Posibles valores de la impedancia de carga, Z_L

Ahora analizaremos los valores que puede tomar la impedancia de la carga, Z_L , y cómo afectan al coeficiente de reflexión. Dado que la impedancia de carga, Z_L , es un valor complejo (podéis ver el recuadro de la derecha), podemos imaginar los casos siguientes:

- Que tome un valor puramente real, sin parte imaginaria.
- Que tome un valor puramente imaginario, sin parte real.
- Que sea una mezcla de los dos casos anteriores.

Cargas puramente resistivas

La expresión más general de la impedancia es: $Z = R + j\chi$, donde R representa la componente resistiva (real) y χ , la componente reactiva (o imaginaria). Una carga "puramente resistiva" es aquella que solo tiene componente real, R .

1.8.1. Impedancia de carga real

Comenzaremos con todos los casos posibles de una impedancia de carga puramente resistiva:

a) Impedancia de carga de valor igual a la impedancia característica de la línea de transmisión, o lo que es lo mismo: $Z_L = Z_0$. Por lo tanto, según hemos visto en la ecuación (46) $\rho_L = 0$. Dado que no tenemos reflexión, no existe onda regresiva v^- . Al no existir onda regresiva, parece que la línea de transmisión tenga una longitud infinita, ya que es como si la onda progresiva estuviese viajando siempre hacia la carga. Sería equivalente a tener la línea adaptada.

Se dice que la carga, Z_L , está **adaptada** cuando esta absorbe toda la potencia que el generador libera en la línea, y no existe ningún tipo de onda reflejada por la carga. Esto sucede cuando la impedancia de la línea es igual a la impedancia de la carga, $Z_0 = Z_L$.

El circuito equivalente sería el que podéis ver en la figura 21, donde tenemos una línea de transmisión infinitamente larga, o sin conectores de salida.

Figura 21

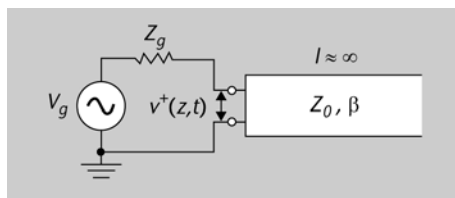


Figura 21

Línea de transmisión de longitud infinita donde no se crea onda regresiva ya que no hay reflexión, $\rho_L = 0$. Corresponde al caso en el que Z_L está adaptada.

Hay que ver este caso como si tuviésemos una de las cuerdas de la figura 2 de longitud infinita, sin una pared a la que estuviese atada. De esta manera, la onda que nosotros generamos con el brazo se propagará infinitamente (recordad que no tenemos pérdidas) a lo largo de toda la línea y no tendremos onda reflejada.

b) Impedancia de carga de valor infinito, $Z_L \rightarrow \infty$, es decir, mucho mayor que Z_0 . Entonces $\rho_L = 1$, con lo que tenemos que, según la ecuación (46), $v^- = v^+$ (podéis ver la figura 22a). En estas condiciones se refleja toda la onda progresiva en la carga.

Si la impedancia de la carga es infinita, se dice que la línea de transmisión se encuentra en **circuito abierto**.

c) Impedancia de carga de valor cero, $Z_L = 0$. Entonces, según la ecuación (46) obtenemos un coeficiente de reflexión en la carga de $\rho_L = -1$, con lo que: $v^- = -v^+$ (podéis ver la figura 22b).

Cuando tenemos una onda sinusoidal del tipo $v(t) = V \cdot \cos(\omega t)$, si añadimos un desfase equivalente a 180° , o π radianes, obtenemos el mismo valor de $v(t)$ pero multiplicado por un signo negativo: $v(t + \pi) = -1 \cdot v(t)$.

La onda reflejada se ve desfasada 180° (el cambio en el signo $v^- = -1 \cdot v^+$) respecto a la onda progresiva o incidente. En este caso, la línea de transmisión se encuentra en **cortocircuito** y toda la onda progresiva regresa al generador en forma de onda regresiva, pero desfasada 180° , es decir, en contrafase, con lo que la onda total se anulará.

La diferencia entre los casos b) y c) anteriores se basa en el cambio de signo, o inversión, de la onda reflejada respecto a la onda incidente. En ambos casos toda la energía de la onda incidente regresa al generador (tendrán la misma amplitud).

Figura 22

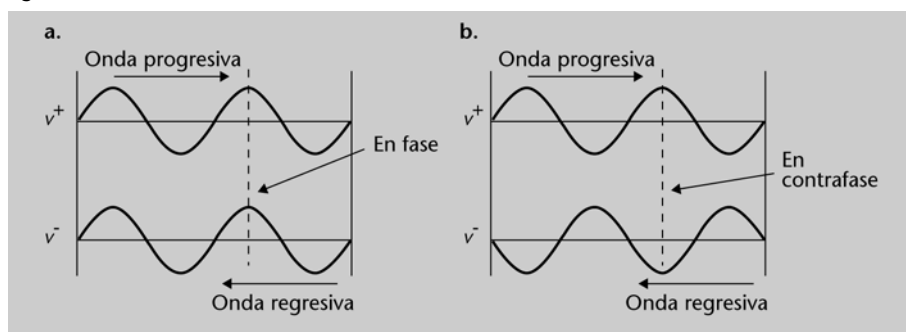


Figura 22

Ondas progresiva, v^+ , y regresiva, v^- , en fase cuando $Z_L \rightarrow \infty$, (caso a) y en contrafase cuando $Z_L = 0$ (caso b).

1.8.2. Impedancia de carga imaginaria

Si la impedancia de carga es puramente imaginaria y con valor $Z_L = j\chi_L$ tendremos reflexión total de la potencia de la onda progresiva hacia la regresiva. Este

La letra χ es la letra griega chi minúscula y se lee "ji".

hecho lo podréis observar en los casos de reactancias inductivas ($\chi_L > 0$) y capacitivas ($\chi_L < 0$).

Esto lo podréis comprobar si aplicamos a la ecuación (46) una impedancia de carga puramente imaginaria:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{j\chi - Z_0}{j\chi + Z_0} \quad (47)$$

Como podréis observar, en la segunda parte de la igualdad de la ecuación (47) el numerador y el denominador son uno conjugado del otro, con un cambio de signo.

$$\rho_L = \frac{-(Z_0 - j\chi)}{Z_0 + j\chi} \quad (48)$$

Si desarrollamos la división para un caso general multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho_L &= \frac{-(Z_0 - j\chi)}{Z_0 + j\chi} = \frac{-(Z_0 - j\chi)(Z_0 - j\chi)}{(Z_0 + j\chi)(Z_0 - j\chi)} = \frac{-(Z_0^2 - j2Z_0\chi - \chi^2)}{Z_0^2 + \chi^2} = \\ &= \frac{-(Z_0^2 - \chi^2) + j2Z_0\chi}{Z_0^2 + \chi^2} = \frac{-(Z_0^2 - \chi^2)}{Z_0^2 + \chi^2} + j \frac{2Z_0\chi}{Z_0^2 + \chi^2} \end{aligned} \quad (49)$$

Ahora, si calculamos el módulo del coeficiente de reflexión de la ecuación (49), obtendremos:

$$\begin{aligned} |\rho_L| &= \sqrt{\left(\frac{Z_0^2 - \chi^2}{Z_0^2 + \chi^2}\right)^2 + \left(\frac{2Z_0\chi}{Z_0^2 + \chi^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(Z_0^2 - \chi^2)^2 + (2Z_0\chi)^2}{(Z_0^2 + \chi^2)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{(Z_0^4 + \chi^4 - 2Z_0^2\chi^2) + 4Z_0^2\chi^2}{(Z_0^2 + \chi^2)^2}} = \sqrt{\frac{(Z_0^2 + \chi^2)^2}{(Z_0^2 + \chi^2)^2}} = 1 \end{aligned} \quad (50)$$

De la ecuación (50) podemos deducir que, si el módulo del coeficiente de reflexión es 1, la amplitud de la onda regresiva será la misma que la de la onda progresiva, excepto por un cambio de fase.

Resistencia, impedancia, reactancia

Cuando tenemos un condensador o una bobina en un circuito, estos elementos se caracterizan idealmente por un valor de capacidad, medida en faradays [F], y un valor de inductancia, medida en henrios [H]. Decimos “idealmente” porque los propios componentes presentan por naturaleza una resistencia al paso de la corriente por su interior, cuyo origen puede ser autoinductivo o autocapacitivo, según el caso. En la resistencia global, en ambos casos la denominaremos *impedancia*, y tendrá un carácter complejo $Z = R + jX$, donde R representa la resistencia real y χ , la reactancia debida a la autoinducción o efecto capacitativo. Esta reactancia será, según el caso: inductiva, $\chi_L = \omega L$; y capacitativa, $\chi_C = -1/\omega C$. Donde ω representa la frecuencia, $\omega = 2\pi f$.

1.8.3. Impedancia de carga compleja

Si la impedancia de carga es del tipo $Z_L = R_0 + jX_L$, el resultado que obtendremos es una combinación de todos los casos anteriores.

Podéis ver la impedancia de carga real en el subapartado 1.8.1 de este módulo.
Podéis ver la impedancia de carga imaginaria en el subapartado 1.8.2 de este módulo.

Ejemplo de cálculo de coeficiente de reflexión

En este ejemplo calcularemos el coeficiente de reflexión para una línea de transmisión con una impedancia característica $Z_0 = 75 \Omega$, con una impedancia de carga Z_L , de valores:

- a) $Z_L = 75 \Omega$
- b) $Z_L = 50 + j100 \Omega$.
- c) $Z_L = 100j \Omega$

Solución

Aplicando directamente la ecuación (46), podemos obtener el valor para el caso a):

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{75 - 75}{75 + 75} = \frac{0}{150} = 0 \quad (51)$$

En este caso, la línea de transmisión está completamente adaptada, ya que el coeficiente de reflexión es cero.

Si volvemos a aplicar la ecuación (46) con el valor b) de la impedancia de carga:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 + j100 - 75}{50 + j100 + 75} = \frac{-25 + j100}{125 + j100} = 0,268 + j0,585 \quad (52)$$

Si utilizamos la ecuación (46) con el tercer valor de la impedancia de carga:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{j100 - 75}{j100 + 75} = \frac{-75 + j100}{75 + j100} = 0,28 + j0,96 \quad (53)$$

1.9. ¿Qué hemos aprendido?

En este primer apartado hemos visto el concepto de línea de transmisión: un elemento que sirve para transmitir ondas electromagnéticas, como una señal eléctrica, de un dispositivo a otro. Hemos visto que en las líneas de transmisión es muy importante su longitud respecto a la longitud de onda para que las ondas puedan circular. También hemos explicado que basan su funcionamiento en el retardo en la propagación de las señales dentro de la línea y hemos mostrado que las líneas de transmisión se pueden clasificar en función de su morfología (bifilares, coplanares y concéntricas).

Otro aspecto importante son las principales características de las líneas de transmisión, la impedancia característica, Z_0 , su longitud, l , y el coeficiente de propagación, β .

A continuación hemos desarrollado un modelo de líneas de transmisión, basado en la aproximación cuasiestática, que nos ha permitido calcular, mediante componentes discretos, la impedancia característica de la línea, Z_0 , y su coeficiente de reflexión, ρ .

Todo esto lo hemos hecho con cualquier tipo de línea de transmisión. También hemos hecho la aproximación a una línea de transmisión ideal, sin pérdidas, en la que los parámetros de conductancia, G' , y resistencia, R' , son cero.

Las soluciones a las ecuaciones que hemos deducido para el modelo de línea de transmisión son dos ondas de tensión y de corriente progresivas y regresivas, que viajan del generador hacia la carga, y de la carga al generador, respectivamente.

Para aplicar todas estas definiciones, en el siguiente apartado veremos unos ejemplos más prácticos.

2. Ejemplos de circuitos

Hasta aquí habéis visto cómo se definía el modelo equivalente de la línea de transmisión, y cómo definíamos sus parámetros:

- Coeficiente de propagación, γ , que se expresa según la ecuación (15).
- Impedancia característica, Z_0 , según la ecuación (29) para líneas de transmisión ideales, o sin pérdidas.
- Coeficiente de reflexión en la carga, ρ_L , según la ecuación (46).

Con los ejemplos siguientes veremos cómo aplicar el modelo de línea de transmisión desarrollado hasta ahora y cómo se calculan sus parámetros. Al mismo tiempo, aprovecharemos para definir nuevos conceptos, como el coeficiente de transmisión.

2.1. Circuitos con una línea de transmisión

Ahora que tenemos definida la línea de transmisión con sus propiedades más importantes, podemos ver un par de ejemplos en detalle para ver cómo se aplican todos los conceptos que hemos explicado hasta ahora. También aprovecharemos para introducir alguno nuevo, derivado de los que ya hemos explicado, y para acabar de entender cómo se propagan las ondas y cómo podemos trabajar con las herramientas explicadas.

2.1.1. Coeficiente de reflexión en el generador

Ya hemos visto que las ondas que se generan se propagan dentro de la línea hasta llegar a la carga y, en función de las características de esta última, la onda progresiva se refleja. También hemos visto que la componente reflejada depende de un coeficiente de reflexión, que generará una onda regresiva que volverá al generador.

Podéis ver que la componente reflejada depende de un coeficiente de reflexión en el subapartado 1.7 de este módulo.

Pero ¿qué sucede cuando la onda regresiva llega al generador? Es lógico pensar que como el generador tiene una resistencia, también puede actuar de carga y puede provocar otra reflexión. Veámoslo con más detalle.

Para resolver este problema utilizaremos un circuito como el de la figura 23, donde tenemos una fuente de tensión constante $V_g = V_0$ con una resistencia interna $Z_g = R_L$, una línea de transmisión con impedancia característica Z_0 y longitud l , y una resistencia de carga puramente resistiva, $Z_L = R_L$.

Figura 23

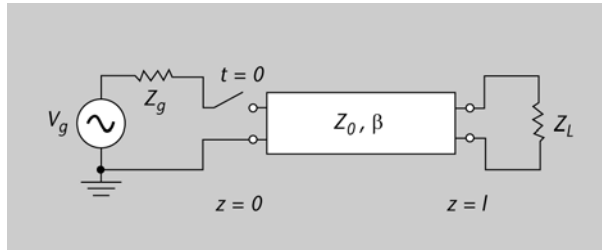


Figura 23

Circuito con una línea de transmisión de características Z_0 y β , y longitud ℓ , con un interruptor.

Entre el polo positivo de la fuente y uno de los conectores del puerto de entrada de la línea de transmisión situamos un interruptor que podemos abrir y cerrar cuando nosotros queramos.

Para estudiar el circuito, analizaremos qué sucede en los siguientes instantes:

- Instante inicial, $t = 0$. Cuando apagamos el interruptor y se generan las ondas progresivas en dirección a la carga.
- Instante en el que la onda progresiva llega a la carga. Es cuando se generan las ondas regresivas, en $t = T$ (donde T es el tiempo que tardan las ondas progresivas en llegar a la carga, $T = \ell/c$).
- Instante $t = 2T$, cuando las ondas regresivas llegan al generador.

El significado de T

$T = \ell/c$ representa el tiempo que tarda una onda que se desplaza a una velocidad c en recorrer una distancia ℓ y, por tanto, en recorrer toda la línea de transmisión.

Lo que sucede durante el tránsito, al apagar el interruptor, lo podemos definir paso a paso a medida que se van produciendo los sucesos:

a) Instante inicial. En el instante $t = 0$ se apaga el interruptor y permitimos el paso de la corriente a la línea de transmisión, donde se genera una onda progresiva de tensión v_1^+ (el subíndice 1 indica la primera onda que se genera y que se propaga por la línea en el primer ciclo), cuya expresión es (recordad la ecuación (37)):

$$v_1^+ = \frac{V_g \cdot Z_0}{Z_g + Z_0} \quad (54)$$

b) Instante $t = \ell/c = T$. En este instante la onda progresiva alcanza la resistencia de carga, donde se genera una onda regresiva v_1^- según la ecuación (46):

$$v_1^- = \rho_L \cdot v_1^+ \quad (55)$$

Esta onda, justo antes del instante $t = 2T = 2\ell/c$, alcanzará el extremo del generador, ya que ha vuelto hasta la fuente.

c) Instante $t = 2T$. La onda regresiva ha llegado al generador y se combina con la nueva onda progresiva que genere el generador v_2^+ (el subíndice 2 indica la onda progresiva que se genera a la llegada de la onda regresiva 1, en el segundo ciclo). Sin embargo, en este caso ya no actúa explícitamente.

Vale la pena comentar que un coeficiente de reflexión se define en el generador como:

$$\frac{v_2^+}{v_1^-} = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} = \rho_G \quad (56)$$

En este ejemplo hemos definido el **coeficiente de reflexión en el generador**, ρ_G , como el cociente entre la onda incidente que se genera por reflexión, v_2^+ , y la que llega reflejada de la primera reflexión a la carga, v_1^- .

Después de ver el ejemplo anterior, se puede concluir que la onda se irá propagando a lo largo de la línea de transmisión y que cada vez se deberá multiplicar la onda incidente (ya sea en la carga o en el generador) por el coeficiente de reflexión correspondiente para obtener la onda reflejada. Podéis ver un diagrama representativo de todas las ondas que se van creando por las sucesivas reflexiones en la figura 24.

Figura 24

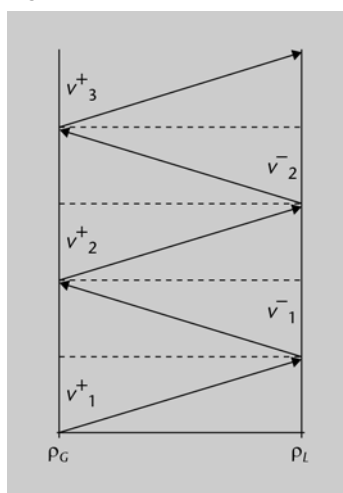


Figura 24

Diagrama de reflexiones sucesivas entre el generador y la carga.

2.2. Circuitos con dos líneas de transmisión: coeficiente de transmisión

Ahora complicaremos un poco más las cosas. Veremos qué sucede en el caso de tener más de una línea de transmisión y un elemento resistivo entre ambas. En el ejemplo siguiente estudiaremos este caso de modo general, pero sólo estudiaremos qué ocurre cuando la onda llega al final de la primera línea y cómo se propaga hasta la segunda línea de transmisión. Utilizaremos como ejemplo un circuito en el que tendremos elementos resistivos en paralelo entre las dos líneas de transmisión.

En la figura 25 tenemos un circuito en el que hay una resistencia R en paralelo con la unión entre dos líneas de transmisión a y b de longitud l_1 y l_2 respecti-

vamente, con impedancias características Z_{01} y Z_{02} , y con una resistencia de carga Z_L al final de la segunda línea de transmisión. Por conveniencia hemos situado el origen del eje z , $z = 0$, en la posición de la resistencia R , el puerto de entrada de la línea a en $z = -l_1$ y el puerto de salida de la línea b en $z = l_2$.

Figura 25

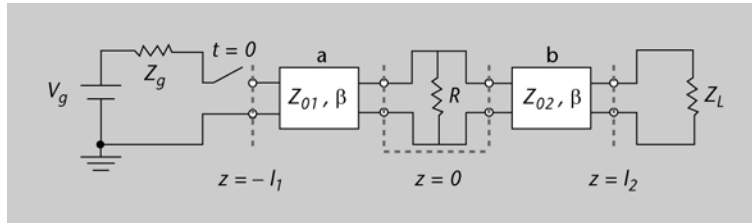


Figura 25

Circuito con una resistencia R en paralelo entre dos líneas de transmisión a y b . Centraremos la resistencia R en el origen del eje z .

Tal como hemos visto en el ejemplo anterior, cuando una onda progresiva se encuentra con una carga, genera una onda reflejada (podéis ver la ecuación (54)). En este ejemplo la resistencia en paralelo R provocará reflexiones parciales de la onda progresiva y el resto de la onda continuará propagándose a través de la línea b hasta la carga Z_L y, así, tendremos $v_{b1}^+ = v_{a1}^+ + v_{a1}^-$. Observad que estamos sumando la onda progresiva y la onda regresiva (recordad la ecuación (30)), ya que la fase de cada onda está implícita en la onda progresiva, v_{a1}^+ , y en la regresiva v_{a1}^- . Es decir, el signo, si se suma o se resta, vendría dado por la fase.

A la relación entre la onda que pasa hasta la línea b , v_{b1}^+ , y la onda que llega a la resistencia R procedente de la línea a , v_{a1}^+ , la denominaremos **coeficiente de transmisión**, τ_{ab} . Este coeficiente lo expresaremos según la siguiente ecuación:

$$\tau_{ab} = \frac{v_{b1}^+}{v_{a1}^+} = \frac{v_{a1}^+ + v_{a1}^-}{v_{a1}^+} \quad (57)$$

La letra τ es la letra griega tau minúscula y se lee "tau".

En este ejemplo hemos definido el **coeficiente de transmisión**, τ_{ab} , como la relación entre la onda que llega a la resistencia R , procedente de la línea a , y la onda que pasa hasta la línea b .

$$\tau_{ab} = \frac{v_{b1}^+}{v_{a1}^+} = \frac{v_{a1}^+ + v_{a1}^-}{v_{a1}^+} \quad (58)$$

Además, se cumple que la suma del coeficiente de transmisión y del de reflexión (ecuación (46)) es 1:

$$\tau_{ab} + \rho = 1 \quad (59)$$

Podéis verlo así: tenemos la onda progresiva que va del generador a la carga, v_{a1}^+ . Cuando llega a la carga una parte se refleja, $v_{a1}^- = \rho v_{a1}^+$ (ecuación (55)) y otra parte se transmite, $v_{b1}^+ = \tau_{ab} v_{a1}^+$ (ecuación (58)).

Se creará un coeficiente de reflexión y otro de transmisión para cada elemento que esté dentro del circuito hasta llegar a la carga, donde la onda incidente solo podrá ser reflejada o disipada.

Con los coeficientes definidos en las ecuaciones (46), (56) y (58) podéis determinar las tensiones y las corrientes dentro de cada línea de transmisión en cada instante.

Ahora trabajaremos con estos coeficientes para el caso en el que se propaguen ondas planas armónicas.

2.3. ¿Qué hemos aprendido?

En este apartado hemos presentado dos ejemplos de circuitos a los que hemos aplicado el modelo de líneas de transmisión, y hemos visto cómo circula la onda progresiva, se refleja en la carga y se crea una onda regresiva que vuelve a la fuente.

También hemos aprovechado los ejemplos presentados en este apartado para ver cómo se aplican los conocimientos explicados en el primer apartado y, al mismo tiempo, definir el coeficiente de reflexión en diferentes puntos de la línea de transmisión: en el generador y en la carga.

Una vez que se ha aprendido cómo funcionan las líneas de transmisión, debemos analizar las señales que circulan por ellas. Lo haremos en el apartado siguiente.

3. Transmisión de señales sinusoidales

En el apartado anterior habéis visto cómo podíamos calcular las amplitudes de las corrientes y las tensiones que circulaban dentro de una línea de transmisión en función de la posición dentro de la línea y del tiempo.

También habéis visto varios circuitos en los que aplicábamos los conocimientos adquiridos para calcular las distintas reflexiones y solapamientos de las ondas progresivas y regresivas dentro de las líneas, y cómo afectaban las cargas al comportamiento de las ondas.

En este apartado:

- Veremos el comportamiento de las líneas de transmisión cuando inyectamos señales puramente sinusoidales en la línea.
- Estudiaremos un caso particular de las señales sinusoidales: las ondas estacionarias dentro de la línea. Las ondas estacionarias se crean cuando la carga está mal adaptada y aparecen reflexiones (ondas regresivas). Estudiaremos este caso particular porque es muy importante tener las ondas estacionarias bien controladas, ya que pueden dañar nuestros generadores de señales a causa del retorno de la onda regresiva.

Podéis ver los ejemplos de los subapartados 2. y 2.2 de este módulo.

Las ondas sinusoidales y el teorema de Fourier

Tiene sentido estudiar las ondas sinusoidales porque gracias al teorema de Fourier cualquier onda se puede expresar como una suma de ondas sinusoidales (podéis ver el apéndice del módulo “Ondas”).

3.1. Las señales sinusoidales

En este subapartado estudiaremos el comportamiento de las líneas de transmisión excitadas por generadores de señales sinusoidales en régimen permanente, es decir, generadores que emiten ondas sinusoidales, que serían las ondas planas armónicas con las que hemos estado trabajando a lo largo de la asignatura.

Por esta razón debemos introducir la notación fasorial. Esta notación es una forma de expresar las ecuaciones (16) y (17) por medio de ecuaciones trigonométricas (seno y coseno), con el objetivo de simplificar las ecuaciones y su tratamiento.

Con este tipo de generadores, todas las señales aplicadas a la línea se pueden expresar según una función del tipo de ecuación trigonométrica. Podéis ver una representación de una función sinusoidal en la figura 26a:

$$v = |V| \cdot \sin \psi \quad (60)$$

o en notación fasorial compleja, podéis ver una representación fasorial de la función sinusoidal en la figura 26b:

$$v = |V| \cdot e^{j\omega t - \gamma z + j\phi} \quad (61)$$

Régimen permanente

La expresión *en régimen permanente* hace referencia al caso ideal en el que las ondas se generan permanentemente y no tenemos los problemas de tránsitos debidos al caso inicial, en el que comienzan a generarse, ni al caso en el que se apague el generador.

Recordad

γ es un número complejo, por ello no ponemos la j en el exponente en la ecuación (61).

donde:

- v representa la onda de tensión.
- V es la amplitud de la onda.
- ω es la frecuencia angular.
- γ es la constante de propagación (ecuación 15). Esta constante tiene una parte real, α , y una parte imaginaria β . Solo estará dentro del seno la parte imaginaria, ya que la parte real queda $e^{-\alpha z}$, y dado que no es una exponencial compleja no corresponde a una función trigonométrica.
- ϕ es una fase arbitraria cualquiera. Normalmente haremos $\phi = 0$.

Las dos barras verticales indican que estamos tomando el valor absoluto de la amplitud, V . Esto se debe al hecho de que su signo (positivo o negativo) estará incluido en la fase arbitraria ϕ .

La letra ϕ es la letra griega phi minúscula y se lee "fí".

Figura 26

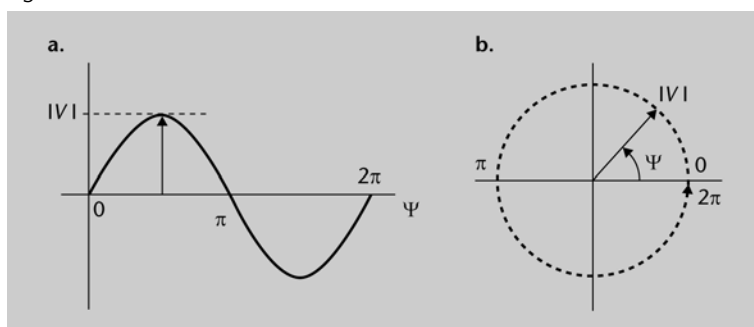


Figura 26

Representación de una onda con amplitud $|V|$ en forma trigonométrica (a) o en forma de fasores (b). Ψ representa el ángulo, o fase, de la onda ($\Psi = \omega t - \beta z + \phi$).

Para pasar la ecuación trigonométrica a compleja lo podéis hacer aplicando las relaciones de Euler:

$$\sin(\Psi) = \frac{e^{i\Psi} - e^{-i\Psi}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos(\Psi) = \frac{e^{i\Psi} + e^{-i\Psi}}{2} \quad (62)$$

Después hay que tener en cuenta que la parte $(\omega t - \beta z + \phi)$ es solo una fase.

Ahora expresaremos las ondas progresivas y regresivas que circulan por el interior de la línea en forma trigonométrica (ecuación (60)),

La onda progresiva de tensión (recordad la ecuación (18)) toma la forma de una onda sinusoidal en función de la posición, z , y del tiempo, t , según la ecuación (60):

$$v^+(z,t) = |V^+| e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \phi^+) \quad (63)$$

Y para la onda progresiva de corriente (recordad la ecuación (19)) también toma la forma de una onda sinusoidal en función de la posición, z , y del tiempo, t . Esto lo podemos expresar mediante la ecuación:

$$i^+(z,t) = \frac{|V^+|}{Z_0} e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z + \phi^+) \quad (64)$$

donde hemos utilizado la ley de Ohm ($V^+ = RI^+$).

La letra Ψ es la letra griega psi mayúscula y se lee "psí".

Recordad

Recordad que la diferencia entre el seno y el coseno es una fase añadida de 90° (o $\pi/2$):

$$\cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(a)$$

Nota

Observad que la parte real de γ , α , no queda dentro de la función trigonométrica.

Las ecuaciones (63) y (64) indican que el voltaje y la corriente experimentan el mismo tipo de variación sinusoidal en todos los puntos de la línea. También nos dicen que estas señales están mucho más retardadas en su oscilación cuanto más a la derecha estén (factor βz creciente). Sin embargo, esta notación es incómoda para trabajar con líneas de transmisión y a partir de ahora trabajaremos solo en notación fasorial. Por otro lado, consideraremos también que la fase inicial, ϕ^+ , es igual a cero.

Si recordamos las ecuaciones (18) y (19) en notación fasorial y separamos la parte del coeficiente temporal $e^{j\omega t}$ tenemos, para las ondas progresivas de tensión y corriente:

$$v^+ = V^+ e^{j\omega t - \gamma z} = V^+ e^{j\omega t} e^{-\gamma z} \quad (65)$$

$$i^+ = I^+ e^{j\omega t} e^{-\gamma z} \quad (66)$$

A partir de este punto dejaremos de escribir la parte temporal ($e^{j\omega t}$) de las ecuaciones en forma fasorial para simplificarlas. Este término siempre se puede añadir multiplicando $e^{j\omega t}$ en los fasores, o añadiéndolo en la fase arbitraria ϕ .

Podemos utilizar las ecuaciones (30) y (31), de manera que la onda de tensión resulta:

$$v = V^+ e^{-\gamma z} + V^- e^{+\gamma z} \quad (67)$$

Y la de corriente:

$$i = \frac{1}{Z_0} [V^+ e^{-\gamma z} - V^- e^{+\gamma z}] \quad (68)$$

donde γ es la constante de propagación de la línea y se expresa según la ecuación (15).

3.2. Propiedades de las señales sinusoidales

Una vez definida la forma de las señales que introduciremos en la línea de transmisión pasaremos a ver qué propiedades tienen y cómo circulan.

3.2.1. Longitud de onda

Recordad que en el caso de líneas de transmisión ideales, la atenuación es nula, $\alpha = 0$, ya que no existen pérdidas y, por tanto, sustituyendo en (15) (que aparece reproducida a la derecha):

$$\gamma = j\beta = \omega\sqrt{LC} \quad (69)$$

Podéis ver las líneas de transmisión ideales en el subapartado 1.6.2 de este módulo.

La constante de propagación

La ecuación (15) de la constante de propagación es:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}$$

Y si recordáis la definición de la velocidad de fase, teniendo presente que la fase es $\omega t - \beta z$, y que para calcular la velocidad de fase hacemos $\omega t - \beta z = \text{constante}$ tenemos:

$$c = v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (69b)$$

donde β es el número de onda relacionado con la frecuencia de oscilación de la onda, ω , según la ecuación (69). La frecuencia angular, ω , se relaciona con la frecuencia lineal, f , mediante la siguiente ecuación:

$$\omega = 2\pi \cdot f \quad (70)$$

donde f es la frecuencia de la onda que se propaga dentro de la línea.

Si tomamos la segunda parte de la ecuación (69b) y sustituimos la ecuación (70), podemos llegar a la expresión:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \rightarrow \beta = 2\pi \frac{f}{c} \rightarrow \beta \frac{c}{f} = 2\pi \quad (71)$$

Dado que se cumple la relación siguiente para cualquier tipo de ondas:

$$\lambda \cdot f = c \quad (72)$$

donde λ es la longitud de onda, tenemos:

$$\beta \left(\frac{c}{f} \right) = 2\pi \rightarrow \beta \lambda = 2\pi \rightarrow \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (73)$$

Denominaremos **longitud de onda** λ a la distancia mínima entre dos puntos de la línea que estén siempre en fase o, lo que es lo mismo, a una distancia entre sí de 2π .

Así, según la ecuación (73), los términos que estén en fase deben cumplir $\beta \lambda = 2\pi$, es decir:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{c}{f} \rightarrow \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (74)$$

Recordad

Velocidad de fase:

$$v_p = \frac{dz}{dt}$$

Podéis ver la velocidad de fase en el módulo "Ondas".

Recordad

Estamos considerando que las ondas que estudiamos se desplazan a la velocidad de la luz en el vacío, c .

Podéis ver el ejemplo 1.1 del subapartado 3.1.2 del módulo "Ondas".

3.2.2. Interferencia

Las ondas de tensión progresivas y regresivas de la ecuación (67) se pueden interpretar como dos vectores que se mueven en sentidos contrapuestos en el plano complejo (recordad la notación fasorial de (63)). Por tanto, la tensión total en un punto z , $v(z)$, tendrá un máximo cuando ambos vectores, $V^+ e^{-\gamma z}$ y $V^- e^{+\gamma z}$, se sumen, o estén en fase (ved la figura 27a), y tendrá un mínimo cuando ambos vectores se resten, o estén en contrafase (ved la figura 27b). En la

figura tenéis tanto la representación en ondas como la representación fasorial, en la que los fasores aparecen dibujados como vectores que giran el ángulo que da la fase.

Figura 27

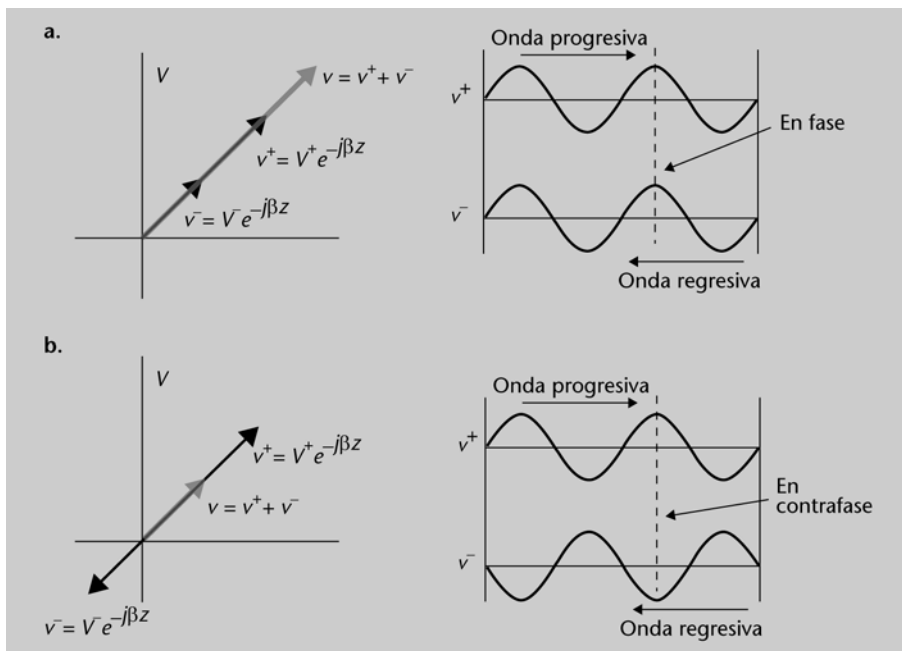


Figura 27

Representación fasorial de las ondas de tensión progresiva y regresiva en el plano complejo. Suma (flecha más amplia) en fase de las dos ondas de tensión (a) y suma en contrafase (b).

Podemos hacer la misma suma fasorial con las ondas progresivas, $i^+ = \frac{V^+}{Z_0} e^{-\gamma z}$, y regresivas, $i^- = \frac{V^-}{Z_0} e^{+\gamma z}$, para la corriente (figura 28a y figura 28b):

Figura 28

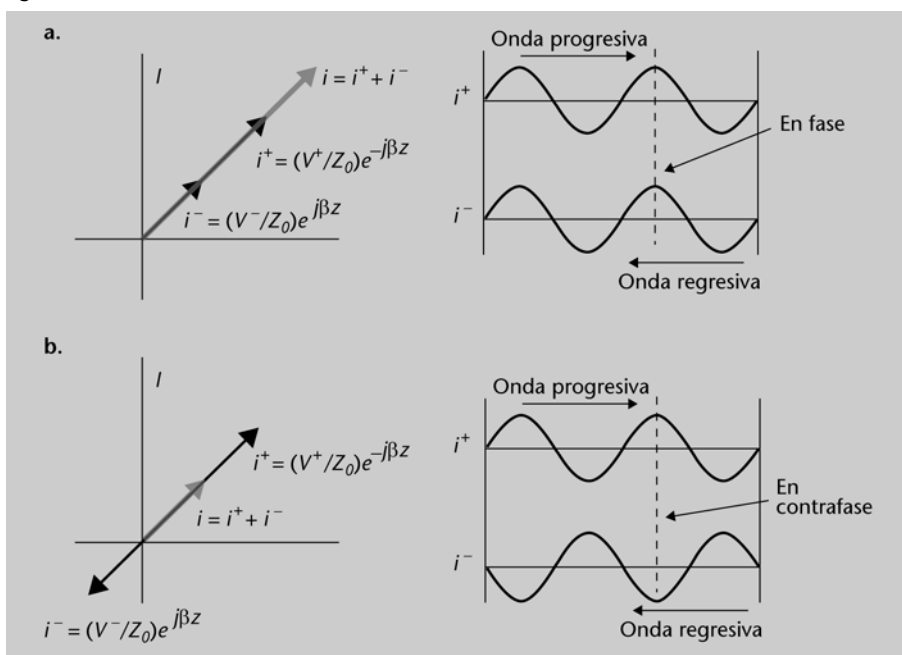


Figura 28

Representación fasorial de las ondas de corriente progresiva y regresiva en el plano complejo. Suma (flecha más amplia) en fase de las dos ondas (a) y suma en contrafase (b).

Si recordáis las ecuaciones (30) y (31), cuando la tensión tenga un máximo, la intensidad $|I|$ presentará un mínimo, y viceversa, a causa del desfase de 180°

entre la onda regresiva de tensión y la onda regresiva de corriente (podéis ver la figura 29). Este es el motivo de que la impedancia característica varíe a lo largo de la línea de transmisión.

Figura 29

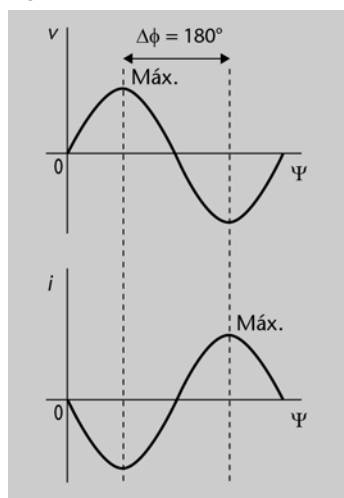


Figura 29

Desfase de 180° entre los máximos de la onda de tensión y de la onda de corriente.

Los máximos de tensión estarán desfasados 180° respecto a los máximos de corriente y viceversa, con los mínimos respectivos. Este desfase provoca que cuando tenemos un máximo de tensión en un punto de la línea de transmisión, en este mismo punto haya un mínimo de corriente.

3.3. Coeficiente de reflexión en una línea de transmisión ideal con señales sinusoidales

Ahora que habéis visto cómo interfieren las ondas progresivas y regresivas, podemos calcular el coeficiente de reflexión a partir de estas ondas progresivas y regresivas del mismo modo que hemos hecho antes.

Según las ecuaciones (67) y (68), las ondas de tensión y de corriente tienen forma sinusoidal. Esto supone que su valor vaya variando a lo largo de la línea en función de la posición, z . Si hemos definido la impedancia, según la ley de Ohm, como el cociente entre la tensión y la corriente, en cada punto de la línea irá variando en función de los valores de v e i .

Para calcular la impedancia de la línea en cualquier punto, consideraremos una sección de línea de longitud l cargada con una impedancia compleja Z_L , tal como podéis ver en la figura 30.

Figura 30

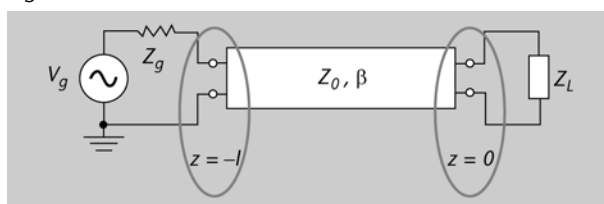


Figura 30

Línea de transmisión cargada con una impedancia general (compleja).

Podéis ver la definición de coeficiente de reflexión en el subapartado 2.1 de este módulo.

Podéis ver la impedancia en el subapartado 1.6.1 de este módulo.

Debéis fijaros en el hecho de que hemos cambiado el origen del sistema de referencia en este circuito. Ahora la carga se encuentra en el origen, $z = 0$, y el generador de señales se encuentra en $z = -l$. Esto lo hacemos porque partiremos de las condiciones en las que la onda progresiva ya ha llegado a la carga y, por tanto, tenemos un coeficiente de reflexión ρ_L . A partir de este punto veremos cómo evoluciona, o se transforma, este coeficiente a lo largo de la línea de transmisión.

El primer paso para calcular la impedancia en cualquier punto de la línea es calcular el coeficiente de reflexión de forma compleja. Para hacerlo aplicaremos la ecuación (46) y tendremos presente que estamos en el caso sin pérdidas y, por tanto, $\alpha = 0$ (ecuación 69). Además, escribiremos las ondas de tensión progresivas y regresivas en forma fasorial, de manera que obtenemos:

$$\rho(z) = \frac{v^-}{v^+} = \frac{V^- e^{+j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z}} = \rho_L e^{j2\beta z} \quad (75)$$

La ecuación (75) nos muestra que el coeficiente de propagación en cualquier posición, $\rho(z)$, depende del coeficiente de reflexión en la carga, $\rho_L(z=l)$ y de una fase, $2\beta z$. Esta fase hace que el coeficiente de reflexión vaya variando a lo largo de toda la línea de transmisión, l .

A la variación del coeficiente de reflexión a lo largo de la línea, la denominaremos **propagación** del coeficiente de reflexión.

Ejemplo de propagación del coeficiente de reflexión

Dada una línea de transmisión ideal con una impedancia característica, $Z_0 = 50 \Omega$, y con una impedancia de carga $Z_L = 50 + j100 \Omega$, calculad el coeficiente de reflexión a una distancia $d = -\lambda/8$ de la carga (el símbolo negativo de la distancia se debe al hecho de que partimos del valor del coeficiente de reflexión en la carga, $z=l$, y entonces nos desplazamos hacia atrás $\lambda/8$).

Solución

Para poder aplicar la ecuación (75), en primer lugar debemos encontrar el coeficiente de reflexión en la carga, ρ_L .

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 + j100 - 50}{50 + j100 + 50} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \quad (76)$$

y ahora ya podemos calcular el coeficiente de reflexión en la posición $d = -\lambda/8$, sustituyendo en la ecuación (75):

$$\rho(z = \frac{\lambda}{8}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j2\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad (77)$$

Observad que hemos aplicado la ecuación (74) para no tener que calcular el coeficiente de propagación.

Recordad

Para pasar un número complejo de forma binómica

$$z = a + bi$$

a forma exponencial $|z|e^{j\phi}$ hay que:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\phi = \arctan \frac{b}{a}$$

Tened cuidado con el signo de ϕ .

3.3.1. Coeficiente de reflexión en la carga

Para encontrar el coeficiente de reflexión en la carga, hay que calcular este coeficiente de reflexión utilizando la ecuación (75) en la posición $z = 0$:

$$\rho_L = \rho(z = 0) = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (78)$$

Observad que la ecuación (78) concuerda perfectamente con la ecuación (46) para el coeficiente de reflexión en una carga:

$$\frac{v^-}{v^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \rho_L \quad (79)$$

3.4. Impedancia de entrada en una línea de transmisión con señales sinusoidales

Ahora calcularemos la impedancia en la entrada de la línea de transmisión cuando tenemos una señal sinusoidal.

Si aplicamos la ley de Ohm y dividimos la expresión de la onda progresiva de tensión, ecuación (30), por la onda progresiva de corriente, ecuación (31), obtendremos la impedancia en la entrada de la línea, Z_{IN} . Esta impedancia la podemos calcular con la siguiente ecuación:

$$Z_{IN} = \frac{v}{i} = \frac{v^+ + v^-}{i^+ + i^-} \quad (80)$$

donde v y i representan la tensión y la corriente en la entrada de la línea, en la posición $z = -l$ en nuestro ejemplo.

Si aplicamos la ecuación (31) en la ecuación (80) obtendremos:

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{v^+ + v^-}{v^+ - v^-} \quad (81)$$

Y si sustituimos las ondas progresivas y regresivas de tensión y corriente por su notación fasorial (ecuación (67)), tenemos:

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z} - V^- e^{j\beta z}} \quad (82)$$

También podemos expresar la ecuación (82) dividiendo el numerador y el denominador por V^+ :

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{\frac{V^+}{V^+} e^{-j\beta z} + \frac{V^-}{V^+} e^{j\beta z}}{\frac{V^+}{V^+} e^{-j\beta z} - \frac{V^-}{V^+} e^{j\beta z}} \quad (83)$$

Si ahora sustituimos la ecuación del coeficiente de reflexión, que es la segunda igualdad de la ecuación (78), y hacemos $z = -l$ nos queda:

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{e^{j\beta l} + \rho_L e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} - \rho_L e^{-j\beta l}} \quad (84)$$

La ecuación (84) expresada en la forma trigonométrica y empleando la expresión (78) para ρ_L , nos da la impedancia en la entrada de la línea en función de la impedancia de carga, Z_L , y la impedancia característica, Z_0 :

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta l + j Z_0 \operatorname{sen} \beta l}{Z_0 \cos \beta l + j Z_L \operatorname{sen} \beta l} \quad (85)$$

Observad que esta expresión nos da, de hecho, la impedancia en cualquier punto de la línea, ya que si queremos la impedancia en un punto de la línea, podemos pensar que “cortamos” la línea en aquel punto y que, por tanto, tiene aquella longitud. Podemos expresar la ecuación (85) de una manera más compacta si dividimos numerador y denominador por $\cos(\beta l)$:

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{Z_L \frac{\cos \beta l}{\cos \beta l} + j Z_0 \frac{\operatorname{sen} \beta l}{\cos \beta l}}{Z_0 \frac{\cos \beta l}{\cos \beta l} + j Z_L \frac{\operatorname{sen} \beta l}{\cos \beta l}} = Z_0 \frac{Z_L + j Z_0 \tan \beta l}{Z_0 + j Z_L \tan \beta l} \quad (86)$$

La ecuación (86) es una ecuación difícil de representar gráficamente, ya que contiene términos exponenciales y depende del coeficiente de reflexión en la carga. Para poder tener una representación gráfica de la evolución de la impedancia de entrada, podemos escribir esta ecuación de la forma:

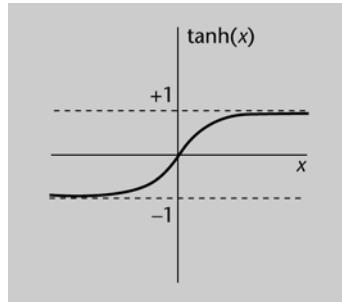
$$Z_{IN} = Z_0 \tanh(\beta l + \delta_Z) \quad (87)$$

donde

$$\delta_Z = \frac{Z_L}{Z_0} \quad (88)$$

Para que os hagáis una idea, la representación gráfica de la tangente hiperbólica es:

Figura 31

**Figura 31**

Representación de la función tangente hiperbólica de x .

O sea, que sus valores están situados entre -1 y $+1$.

3.5. Periodicidad de la impedancia de entrada, o líneas de $\lambda/2$

Ahora veremos cómo la impedancia que podemos medir a lo largo de la línea de transmisión tiene un comportamiento periódico.

Observad que las ecuaciones (85) y (86) son funciones periódicas con período proporcional a la longitud de la línea de transmisión, l (recordad el factor βl). Esto se debe a la periodicidad de las funciones trigonométricas que la forman, que es de 2π radianes:

$$\cos(\alpha+2\pi) = \cos(\alpha) \quad (89)$$

y

$$\sin(\alpha+2\pi) = \sin(\alpha) \quad (90)$$

Y de la misma forma:

$$\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha) \quad (91)$$

y

$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin(\alpha) \quad (92)$$

Las funciones trigonométricas de las ecuaciones (91) y (92) cambian su signo cada π radianes, aunque manteniendo su valor absoluto. No obstante, en el caso de la ecuación (85) significa que se cambia el signo del numerador y el denominador, por tanto, el resultado es el mismo, tal como mostramos en el siguiente desarrollo, en el que hemos añadido π al argumento para ver su periodicidad:

$$\begin{aligned} Z_{IN} &= \frac{Z_L \cos(\beta l + \pi) + jZ_0 \sin(\beta l + \pi)}{Z_0 \cos(\beta l + \pi) + jZ_L \sin(\beta l + \pi)} = \frac{-Z_L \cos(\beta l) - jZ_0 \sin(\beta l)}{-Z_0 \cos(\beta l) - jZ_L \sin(\beta l)} = \\ &= \frac{-[Z_L \cos(\beta l) + jZ_0 \sin(\beta l)]}{-[Z_0 \cos(\beta l) + jZ_L \sin(\beta l)]} = Z_{IN} \end{aligned} \quad (93)$$

Si tomáis la ecuación (74), para poder añadir este desfase de π radianes en la línea de transmisión, veréis que hay que (recordad que $\beta = 2\pi/\lambda$):

$$\beta \ell = \pi \rightarrow \ell = \frac{\lambda}{2} \quad (94)$$

De donde podemos deducir que:

La impedancia de las líneas de transmisión tiene una periodicidad de $\lambda/2$. Esta periodicidad significa que cada $\lambda/2$ toman los mismos valores las ondas de tensión y corriente. Es decir, la impedancia de entrada toma el mismo valor si vamos introduciendo tantas líneas de longitud $\lambda/2$ como queramos.

A continuación veremos algunos casos particulares, como el cortocircuito y el circuito abierto.

3.5.1. Impedancia en cortocircuito y en circuito abierto

Una vez que hemos calculado de manera general la impedancia de entrada de la línea de transmisión, podemos calcular los siguientes casos particulares:

- Impedancia en cortocircuito, que simbolizaremos Z_{cc} .
- Impedancia en circuito abierto, que simbolizaremos Z_{ca} .

Si tomáis la ecuación (84), podemos concretar ambos casos particulares en función de los valores de la impedancia de carga Z_L :

- Para $Z_L = 0$, tenemos la línea de transmisión en cortocircuito, ya que es como si tuviésemos una carga de resistencia $R = 0$ (podéis ver la figura 32).

Figura 32

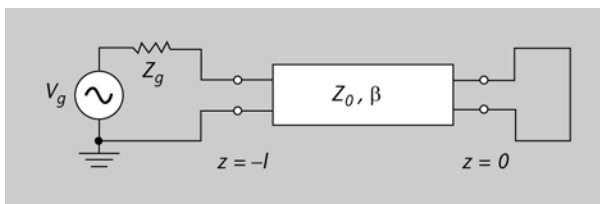


Figura 32

Línea de transmisión en cortocircuito.

Podemos calcular la impedancia en la entrada del circuito, Z_{cc} , que será puramente reactiva. El valor de esta reactancia en cortocircuito lo denominaremos χ_{cc} . ¡Veámoslo! Si en la ecuación (85) sustituimos $Z_L = 0$, obtenemos:

$$Z_{cc} = Z_0 \frac{jZ_0 \tan \beta l}{Z_0} = jZ_0 \tan(\beta l) = j\chi_{cc} \quad (95)$$

La letra χ es la letra griega khi minúscula y se lee "ji".

Para $Z_L \rightarrow \infty$, tenemos la línea de transmisión en circuito abierto, ya que si tenemos una resistencia infinita es como si no tuviésemos conectados los dos extremos de la línea de transmisión (podéis ver la figura 33).

Figura 33

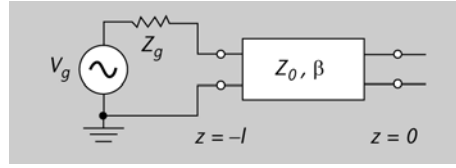


Figura 33

Línea de transmisión en circuito abierto.

Podemos calcular la admitancia en circuito abierto, Y_{ca} , que también será puramente reactiva, en función de la reactancia en circuito abierto χ_{ca} .

$$Z_{ca} = \frac{1}{Y_{ca}} \quad (96)$$

Si en la ecuación (86) sustituimos $Z_L \rightarrow \infty$, obtenemos:

$$Z_{ca} = Z_0 \frac{(Z_L \rightarrow \infty) + jZ_0 \tan \beta \ell}{Z_0 + j(Z_L \rightarrow \infty) \tan \beta \ell} = -j \frac{Z_0}{\tan \beta \ell} = -j\chi_{ca} \quad (97)$$

La impedancia de entrada en los casos de circuito abierto y cortocircuito es siempre reactiva, ya que la impedancia Z sólo depende de χ . Los valores posibles de la impedancia de entrada en cortocircuito, Z_{cc} , y en circuito abierto, Z_{ca} , los valores de la ecuación (95) y (97), varían entre $-\infty$ y $+\infty$ según la longitud de la línea (ved la figura 34a y la figura 34b).

Figura 34

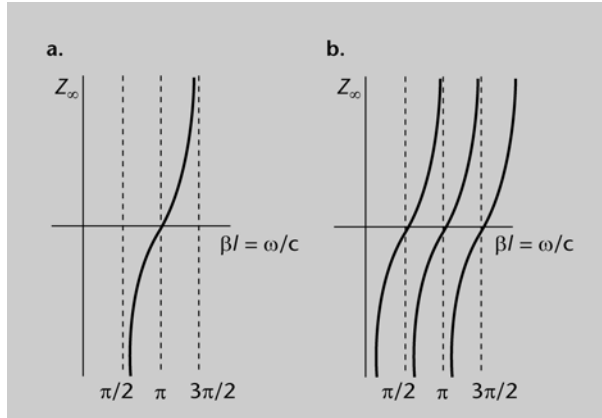


Figura 34

Representaciones gráficas de las impedancias, Z_{cc} , en circuito cerrado (a) y en circuito abierto Z_{ca} , (b). Observad que sus valores varían entre $-\infty$ y $+\infty$, y que entre Z_{cc} y Z_{ca} hay un desfase de $\pi/2$.

Tal como podéis ver en los dos casos de la figura 34, la impedancia en circuito abierto, Z_{ca} , y en circuito cerrado, Z_{cc} , tienen representaciones muy parecidas para un mismo valor de $\beta \ell$ salvo un desfase de $\pi/2$ radianes. Este desplazamiento se puede expresar tal como podéis ver en la ecuación siguiente:

$$Z_{cc}(\beta \ell) = Z_{ca}(\beta \ell + \frac{\pi}{2}) \quad (98)$$

3.6. Inversor de impedancia de entrada o líneas de $\lambda/4$

Hemos visto que cuando tenemos una señal sinusoidal que circula por el interior de una línea de transmisión, esta no se ve perturbada si añadimos un

trozo de línea de longitud igual a la mitad de la longitud de onda de la señal sinusoidal, $\lambda/2$.

Ahora veremos qué sucede si, en lugar de una línea de $\lambda/2$, tenemos una línea de longitud $\lambda/4$. Tomamos este valor ya que la línea de transmisión presenta un comportamiento curioso cuando su longitud es igual o proporcional a una cuarta parte de la longitud de onda de la señal que circula por esta.

Para ver qué pasa en este caso operaremos igual que hemos en el anterior.

Si recordáis la ecuación del coeficiente de propagación, ecuación (74), y sustituimos el valor de la longitud de la línea de transmisión por $\lambda/4$, obtenemos:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda}\ell \quad (99)$$

en ese caso, al sustituir en la derecha ℓ por $\lambda/4$, tenemos para $\beta\ell$:

$$\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (100)$$

Si aplicamos este resultado a la ecuación (85), obtendremos:

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{Z_L \cos \frac{\pi}{2} + jZ_0 \sin \frac{\pi}{2}}{Z_0 \cos \frac{\pi}{2} + jZ_L \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{Z_0^2}{Z_L} \quad (101)$$

Y si utilizamos el resultado de la ecuación (101) para simplificar, obtenemos:

$$\frac{Z_{IN}}{Z_0} = \frac{1}{\frac{Z_L}{Z_0}} \rightarrow \overline{Z_{IN}} = \frac{1}{\overline{Z_L}} \quad (102)$$

donde $\overline{Z_{IN}}$ representa la impedancia de entrada normalizada, ya que la hemos dividido entre Z_0 .

Normalmente la normalización de un parámetro, o de una lista de valores (por ejemplo entre 0 y 10), se hace para pasar este rango de valores a un rango normalizado entre 0 y 1. Para normalizar, lo que haremos será dividir los valores de la lista por el valor máximo de todos los posibles en esta lista, en nuestro ejemplo, 10. Así ya tenemos que todos los elementos de la lista tendrán un valor entre 0 y 1.

En este caso, lo que hacemos es normalizar el rango de valores de la impedancia de entrada Z_{IN} al valor de la impedancia característica de la línea de transmisión, dividiendo por Z_0 .

La ecuación (102) nos dice que las líneas de transmisión con una longitud de $\lambda/4$ actúan como **inversores de impedancias**, ya que a partir de una línea de longitud igual a una cuarta parte de la longitud de la onda que circula por esta, la impedancia normalizada pasa de ser $\overline{Z}$ a ser $\frac{1}{\overline{Z}}$.

Podéis ver cómo hemos obrado en el caso de impedancia en cortocircuito y en circuito abierto en el subapartado 3.5 de este módulo.

3.7. Ondas estacionarias

Ahora que habéis visto cómo circulan las señales sinusoidales por el interior de las líneas de transmisión, podemos estudiar un caso particular del comportamiento de las líneas cuando circulan por estas ondas estacionarias.

Tal como indica su nombre, las ondas estacionarias son un tipo de onda sinusoidal que tienen la propiedad de estar “quietas” dentro de la línea de transmisión. Con el término *quietas* queremos decir que siempre tienen los máximos y los mínimos en la misma posición. Después del desarrollo, veremos cómo es que las ondas estacionarias presentan esta característica tan curiosa.

Cuando por una la línea de transmisión sólo se transmite una onda progresiva (positiva o negativa), podemos medir la amplitud de la tensión mediante su valor eficaz. Este valor nos indica la media de la amplitud de la onda mientras se desplace por la línea, que permanecerá constante a lo largo de toda la línea.

Si tomáis la ecuación (65) y calculáis el valor absoluto de la onda progresiva, nos quedará:

$$|V(z)| = |V^+| = |V^+ e^{j\omega t - j\beta z}| \quad (103)$$

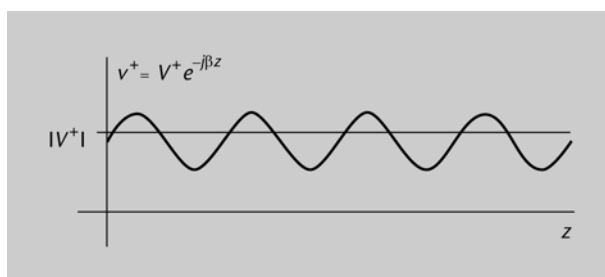
El símbolo de dos barras verticales $|X|$ indica valor absoluto de X o, en el caso de las tensiones y las corrientes, su valor eficaz, $|V|$ y $|I|$ respectivamente. Calcularemos el valor eficaz de una onda de tensión sinusoidal a partir de la integración de la onda desde $t = 0$ hasta el infinito $t \rightarrow \infty$, como:

$$|V| = \int_0^\infty V_0 \sin(\omega t) dt = \frac{\sqrt{2}}{2} V_0 \quad (104)$$

donde V_0 es el valor de la amplitud de la onda. El valor eficaz es un valor constante.

En la figura 35 podéis ver la representación de la onda progresiva y su valor eficaz. Este valor eficaz de la onda progresiva de tensión, ecuación (104), es constante para cualquier valor de z .

Figura 35



Recordad

Estamos estudiando el caso sin pérdidas, es decir, $\alpha = 0$. Por ello, en (103) hemos puesto $j\beta$ en lugar de γ .

Figura 35

Representación del valor eficaz $|V^+|$ de una onda de tensión progresiva $V^+ e^{-j\beta z}$.

Ahora bien, hay que tener en cuenta el hecho siguiente:

Cuando dentro de la línea se propagan al mismo tiempo una onda progresiva y otra regresiva, el módulo de la tensión puede fluctuar, a causa de la interferencia entre las dos ondas (ved la figura 37), entre los siguientes valores (recordad la figura 27):

Recordad

La onda de tensión se representa como v y su amplitud como V^+ .

Podéis ver que los valores máximos y mínimos son el resultado de la interferencia entre la onda progresiva y la regresiva en el subapartado Interferencia de este módulo.

- Un valor máximo que aparece cuando los vectores $V^+e^{-j\beta z}$ y $V^-e^{+j\beta z}$ se suman en fase y que estará expresado por la ecuación siguiente:

$$|V_{max}| = |V^+| + |V^-| \quad (105)$$

La ecuación (104) la podemos expresar en función del coeficiente de reflexión, ρ_L , utilizando la ecuación (46):

$$|V_{max}| = |V^+|(1 + |\rho_L|) \quad (106)$$

- Un valor mínimo que se produce cuando los vectores $V^+e^{-j\beta z}$ y $V^-e^{+j\beta z}$ se suman en contrafase, determinados por la ecuación siguiente:

$$|V_{min}| = |V^+| - |V^-| \quad (107)$$

Esta ecuación la podemos expresar en función del coeficiente de reflexión, ρ_L , volviendo a utilizar la ecuación (46):

$$|V_{min}| = |V^+|(1 - |\rho_L|) \quad (108)$$

Este mínimo se da a una distancia $\lambda/4$ a la derecha o a la izquierda de la situación del valor máximo. Recordad que $\beta \cdot \lambda/4 = \pi/2$ es una distancia igual al desfase para pasar de un máximo a un mínimo en una onda sinusoidal (podéis ver la figura 36).

Estos puntos de máximo y mínimo los podéis ver representados en la figura 36.

Figura 36

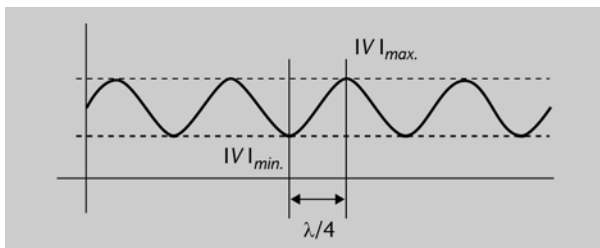


Figura 36

Distribución del módulo de la amplitud en una línea de transmisión con una onda de tensión estacionaria t.

En la figura 37 podéis ver cómo se crea la onda de interferencia a partir de la suma entre la onda progresiva y la onda regresiva a medida que ambas se propagan por la línea. En el caso a) las dos ondas se encuentran casi en fase, por lo que la amplitud de la onda resultante es casi el doble de la de las ondas iniciales. En el caso c) las dos ondas se encuentran en contrafase, de manera que la onda resultante tiene amplitud cero. En el caso b) podéis observar el caso intermedio del resultado de la interferencia entre las dos ondas.

Figura 37

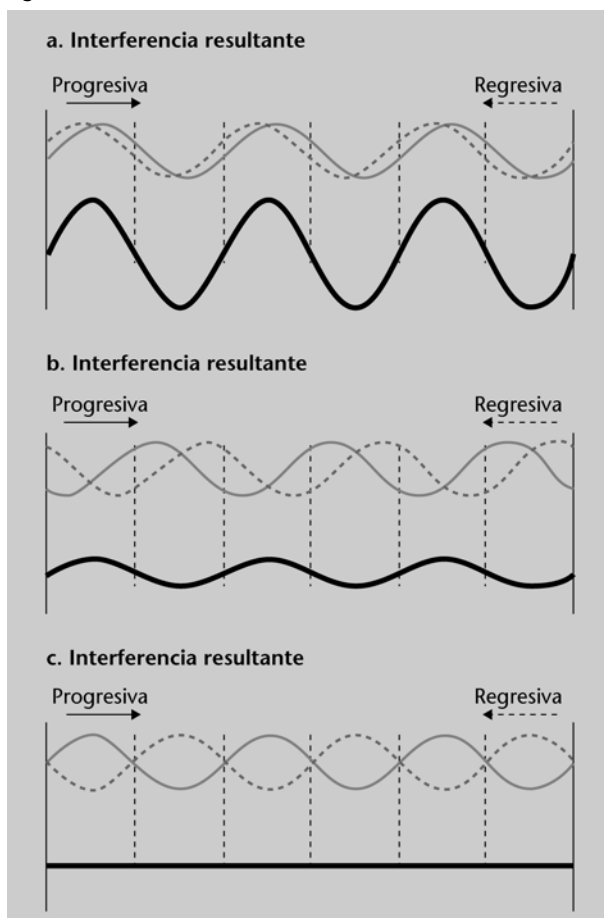


Figura 37

Patrón de la onda resultante de la interferencia entre una onda progresiva (línea sólida) y otra regresiva (línea discontínua). En el caso **a.** podéis observar la interferencia constructiva, en el **c.**, la destructiva, mientras que en el caso **b.**, tenéis un caso intermedio.

Ahora veremos qué expresión tienen estas ondas, que veremos que son ondas estacionarias.

Si representamos las ecuaciones de las ondas de tensión progresiva y regresiva en función de la posición, z , y del tiempo, t , (ecuación (65)) nos quedará:

$$v(z,t) = v^+(z,t) + v^-(z,t) \quad (109)$$

O, lo que es lo mismo, en sus formas trigonométricas:

$$v(z,t) = |V^+| \sin(\omega t - \beta z) + |V^-| \sin(\omega t + \beta z) \quad (110)$$

Si, para simplificar, suponemos que las dos ondas tienen la misma amplitud,

$$|V^+| = |V^-| \quad (111)$$

podemos utilizar la siguiente igualdad trigonométrica:

$$\sin(\theta) + \sin(\phi) = 2 \cos\left(\frac{\theta - \phi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta + \phi}{2}\right) \quad (112)$$

Con $\theta = \omega t - \beta z$ y $\phi = \omega t + \beta z$, obtenemos:

$$v(z,t) = 2|V^+| \cos(\beta z) \sin(\omega t) \quad (113)$$

Enlace de interés

En el enlace siguiente podéis ver cómo se crean las ondas de interferencia en una representación en movimiento.

El enlace es: http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Standing_wave_2.gif

Recordad

Estamos en el caso $\alpha = 0$ y, por tanto, $\gamma = \beta$.

Recordad

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

Esta ecuación (113) no es la ecuación de una onda normal que se propaga por la línea de transmisión, ya que no tiene el término $(\beta z + \omega t)$. Ha desaparecido por tanto la propiedad de propagación y por esta razón hablamos de **ondas estacionarias**. La amplitud de la señal resultante será:

$$|V| = 2|V^+|\cos(\beta z) \quad (114)$$

Y cada punto de la línea de transmisión, z , vibrará con una frecuencia angular ω .

La ecuación (113) refleja el hecho de que la tensión, v , en función del tiempo t y de la posición dentro de la línea, z , se ve representada por dos funciones sinusoidales:

- La primera sólo es función de la posición:

$$2|V^+|\cos(\beta z) \quad (115)$$

- La segunda sólo es función del tiempo:

$$\cos(\omega t) \quad (116)$$

Es decir, todos los puntos de la línea de transmisión se encuentran simultáneamente en fase, independientemente de su posición, ya que la fase no depende de z (no es del tipo $(\beta z + \omega t)$), tal como señalábamos al principio de este subapartado.

En la figura 37 podéis observar que los nodos de la onda resultante siempre se encuentran en el mismo lugar y que solo cambia la amplitud de la onda. Este hecho refleja el carácter de estacionariedad. La ecuación (113) representa, por tanto, lo que denominamos **onda estacionaria** (que adquiere la forma de la figura 36c).

Podéis ver el concepto de onda estacionaria en el módulo "Ondas".

3.7.1. Relación de onda estacionaria

Tal como habéis visto anteriormente, las ondas estacionarias tienen un valor de amplitud máxima, $|V_{max}|$, y un valor de amplitud mínima, $|V_{min}|$. Calculemos ahora el parámetro denominado **relación de onda estacionaria (ROE)**, que se define como el cociente entre los valores máximo y mínimo de la amplitud. El parámetro ROE permite medir, en cierta manera, "cómo de estacionaria" es una onda estacionaria.

El parámetro ROE, o S , nos da una idea de cómo de "buena" es una onda estacionaria en términos del nivel de definición de la onda o, lo que es lo mismo, de si se pueden diferenciar claramente los máximos de los mínimos.

Podéis ver que las ondas tienen un valor de amplitud máxima y un valor de amplitud mínima en el subapartado 3.7 de este módulo.

El parámetro ROE en inglés recibe el nombre de *voltage standing wave ratio* y a menudo se encuentra expresado con la sigla VSWR.

La onda estacionaria se caracteriza por la relación entre su máximo y mínimo de interferencia, dados por las ecuaciones (105) y (107) (o (106) y (108)):

$$S = \frac{|V|_{\max}}{|V|_{\min}} = \frac{|V^+| + |V^-|}{|V^+| - |V^-|} = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (117)$$

El parámetro S se denomina **relación de onda estacionaria** o ROE. Este parámetro expresa cómo de ideal es la onda estacionaria mediante la relación entre sus amplitudes máxima y mínima. Podemos relacionar este parámetro con el coeficiente de reflexión con la fórmula:

$$S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (118)$$

Donde también podemos encontrar $|\rho|$ a partir de S .

$$|\rho| = \frac{S - 1}{S + 1} \quad (118b)$$

En función de los valores del coeficiente de reflexión, la relación de onda estacionaria puede variar entre los valores siguientes:

- Para una línea adaptada (sin reflexiones), $|\rho| = 0$, y por tanto, el parámetro es $S = 1$. Este es el valor mínimo que puede tener el parámetro S , y nos dice que no existe onda estacionaria.
- Si en la línea hay una carga que refleja toda la energía incidente, el coeficiente de reflexión $|\rho| = 1$, y el parámetro $S \rightarrow \infty$. En este caso, la onda reflejada es igual a la onda incidente, de manera que toda la potencia vuelve al generador. Este sería el peor caso, ya que la onda estacionaria es máxima y el generador se puede dañar si no está protegido.

Podéis ver que en una línea adaptada $|\rho| = 0$ en el subapartado 1.9 de este módulo.

El valor de la relación de onda estacionaria puede variar entre 1 e ∞ , y suele expresarse en decibelios [dB].

$$S(\text{dB}) = 20 \log(S) \quad (119)$$

Recordad que S representa un cociente entre tensiones.

El parámetro ROE es muy importante, ya que nos da una idea de qué potencia se refleja de vuelta al generador. En el caso de que la potencia devuelta sea muy elevada, puede dañar el generador si no está bien protegido.

Observación

No confundid S con el parámetro de la transformada de Laplace, ya que el de Laplace es en minúscula, s .

Ejemplo de cálculo del parámetro ROE

Calcularemos el parámetro S , o ROE, de una línea de transmisión de impedancia característica 50Ω , por la que circula una onda progresiva de amplitud 1 V y fase $\pi/4$ radianes. Cargaremos esta línea con una impedancia de valor $Z_L = 50 + j100 \Omega$. También calcularemos los valores de tensión máximo, $|V_{\max}|$, y mínimo, $|V_{\min}|$, de la onda estacionaria.

Solución

En primer lugar deberemos calcular el coeficiente de reflexión en la carga, ρ_L (ecuación (46)), para poder aplicar la ecuación (118). Así:

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 + j100 - 50}{50 + j100 + 50} = \frac{j}{1 + j} = 0,5 + j0,5 \quad (120)$$

O, en notación fasorial:

$$\rho_L = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \quad (121)$$

Ahora ya podemos aplicar la ecuación (117):

$$S = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 5,82 \quad (122)$$

Si ahora queremos calcular los valores de $|V_{\max}|$ y $|V_{\min}|$, aplicaremos directamente las ecuaciones (105) y (107):

$$|V_{\max}| = |V^+|(1 + |\rho_L|) = \left| 1e^{j\frac{\pi}{4}} \right| \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1,7 \text{ V}_{\text{rms}} \quad (123)$$

y

$$|V_{\min}| = |V^+|(1 - |\rho_L|) = \left| 1e^{j\frac{\pi}{4}} \right| \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0,29 \text{ V} \quad (124)$$

Módulo y fase de un número complejo

Para pasar a notación fasorial un número complejo $z = a + jb$, debemos calcular el módulo y la fase del número complejo:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

i

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

3.8. ¿Qué hemos aprendido?

En este apartado nos hemos centrado en la transmisión de señales sinusoidales a través de las líneas de transmisión.

Hemos definido cómo son las funciones de las ondas que circulan por el interior de la línea y cómo van variando los parámetros definidos en el primer apartado en función de la señal. Con este objetivo hemos vuelto a encontrar el coeficiente de reflexión en la carga y la impedancia de entrada.

El análisis de las ondas nos ha mostrado una característica curiosa de las señales sinusoidales: su periodicidad dentro de la línea de transmisión cada $\lambda/2$. Esta propiedad nos ha permitido:

- Definir las impedancias de línea en circuito abierto, Z_{ca} , y en circuito cerrado, Z_{cc} .
- Definir las características de una línea de transmisión inversora, que invierte la impedancia que tiene en la entrada y que tiene una longitud de $\lambda/4$.

- Definir las ondas estacionarias como un efecto de interferencia entre la reflexión de la onda incidente en la carga y la propia onda reflejada, y definir también su parámetro de relación de onda estacionaria (ROE).



Recordad que el parámetro ROE en inglés recibe el nombre de *voltage standing wave ratio* y a menudo lo encontraréis expresado con la sigla VSWR.

Todos estos cálculos son largos y pueden ser complicados. En el siguiente apartado os mostraremos cómo utilizar una herramienta que nos facilitará mucho todos los cálculos de los parámetros anteriores, la carta de Smith.

4. La carta de Smith

Ya hemos visto cómo se comportan las líneas de transmisión cuando se utilizan para transmitir una señal sinusoidal. También hemos definido las impedancias de entrada, Z_{IN} , de las líneas (recordad las ecuaciones (85) y (86)) y el coeficiente de reflexión, ρ_L .

Podéis ver el comportamiento de las líneas de transmisión al transmitir una señal sinusoidal, las impedancias de entrada y el coeficiente de reflexión en el apartado 3 de este módulo.

El cálculo de la impedancia característica de una línea de transmisión es esencial para poder adaptar bien la línea y poder transmitir, así, toda la potencia generada por la fuente en la carga. Por esta razón, para poder simplificar estos cálculos, se inventó la carta de Smith.

Podéis ver el cálculo de la impedancia característica de una línea de transmisión en el subapartado 3.4 de este módulo.

La carta de Smith fue inventada por P. H. Smith en el año 1939, mientras trabajaba para los laboratorios Bell, para calcular la adaptación de las líneas de transmisión a antenas de grandes dimensiones. Inicialmente propuso que la carta tuviese un diseño de forma cuadrada, pero tenía limitaciones en el rango de valores que se podían utilizar, hasta que resolvió el diseño utilizando coordenadas polares. Tenéis una carta de Smith completa en la figura 38.

Los transmisores de radio

En el caso de un sistema de transmisión de radio, la antena está diseñada específicamente para el tipo de ondas que se quieren transmitir, y el generador sencillamente las genera. Sólo necesitamos que la línea de transmisión que diseñemos se adapte a estos dos sistemas para realizar una buena transmisión de la señal.

La carta de Smith se utiliza, entre otros usos, para calcular la impedancia de entrada de una línea de transmisión a partir de la longitud de la línea con relación a la frecuencia de la señal sinusoidal que circula por esta, y de su impedancia de carga, o, en un nivel más avanzado, para acoplar impedancias.

Recordad

La impedancia de entrada de la línea de transmisión, Z_{IN} , varía en función de la frecuencia de la señal sinusoidal (ecuación (90)).

En este apartado veremos cómo es la carta de Smith, cómo está diseñada y cómo utilizarla, mediante algunos ejemplos.

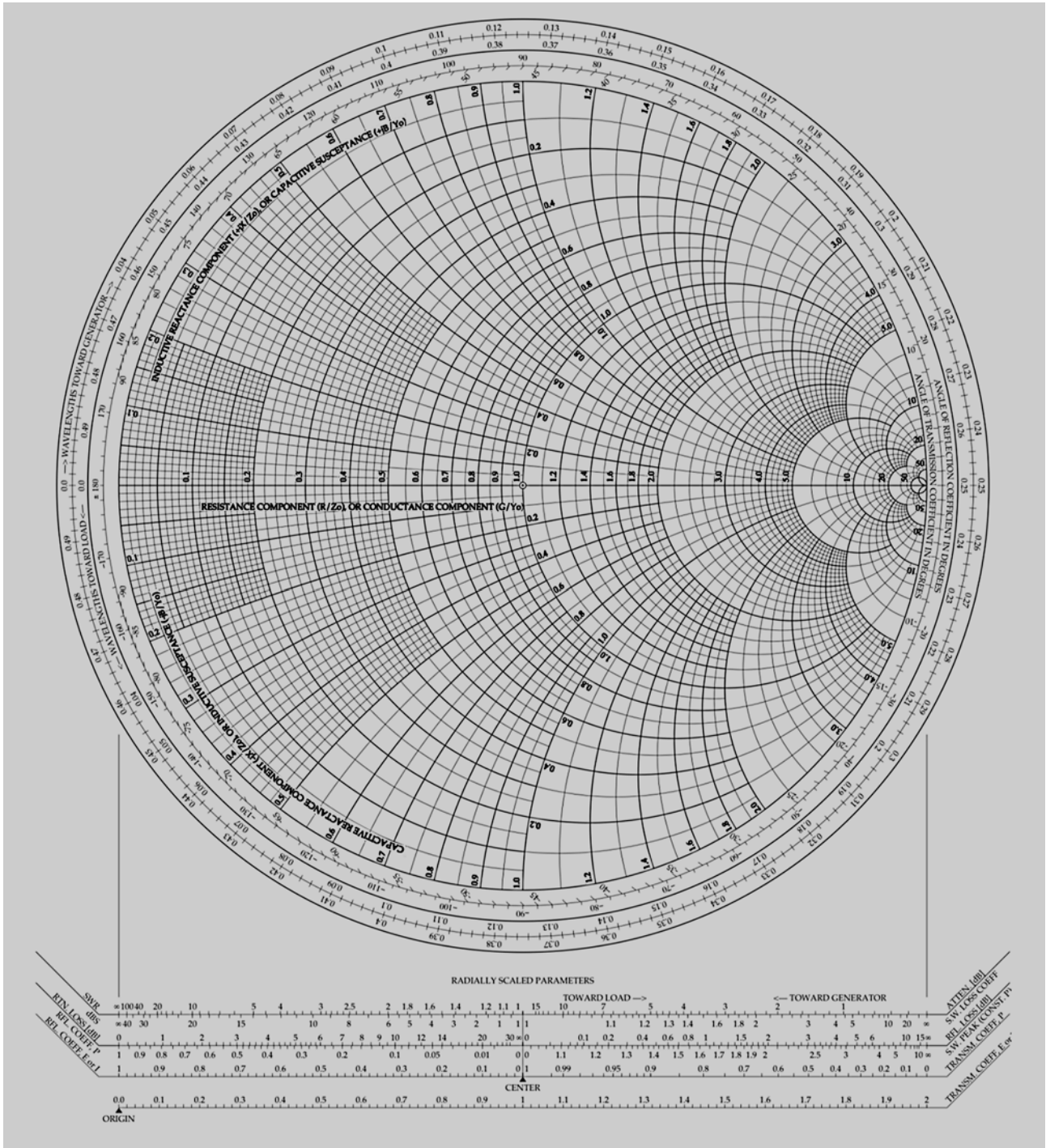
4.1. Descripción de la carta de Smith

En la carta de Smith representada se pueden ver:

- El coeficiente de reflexión: lo estará en forma fasorial, de manera que tendrá un módulo y una fase:

$$\rho = |\rho|e^{j\phi} \quad (125)$$

Figura 38. Carta de Smith completa



- La impedancia de la línea de transmisión, Z_{IN} (ecuación 85):

$$Z_{IN} = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta l + j Z_0 \sin \beta l}{Z_0 \cos \beta l + j Z_L \sin \beta l} \quad (126)$$

Recordad

Los números complejos se pueden representar por componentes: parte real y parte imaginaria, por ejemplo: $a + jb$; o por módulo y fase, por ejemplo: $Ae^{j\theta}$, donde A es el módulo y θ el ángulo o fase.

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

i

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Aunque, de hecho, la carta de Smith no representa las impedancias así, sino que las representa normalizadas respecto a la impedancia característica de la línea de transmisión, Z_0 :

$$\bar{Z} = \frac{Z}{Z_0} \quad (127)$$

Ahora que ya hemos visto qué se representa, veamos cómo es la carta de Smith. Tenéis una carta completa representada en la figura 38 y podéis ver que está formada por:

- Una primera circunferencia exterior donde se indica la fase (ϕ en la ecuación 125) del coeficiente de reflexión (podéis ver la figura 39) en grados sexagesimales.

Figura 39

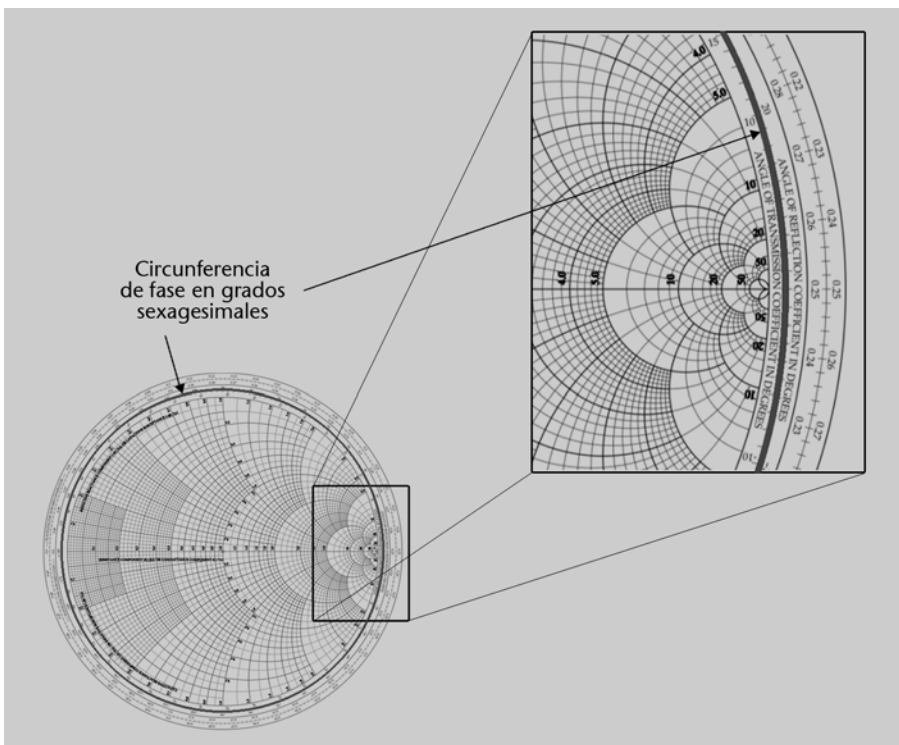


Figura 39

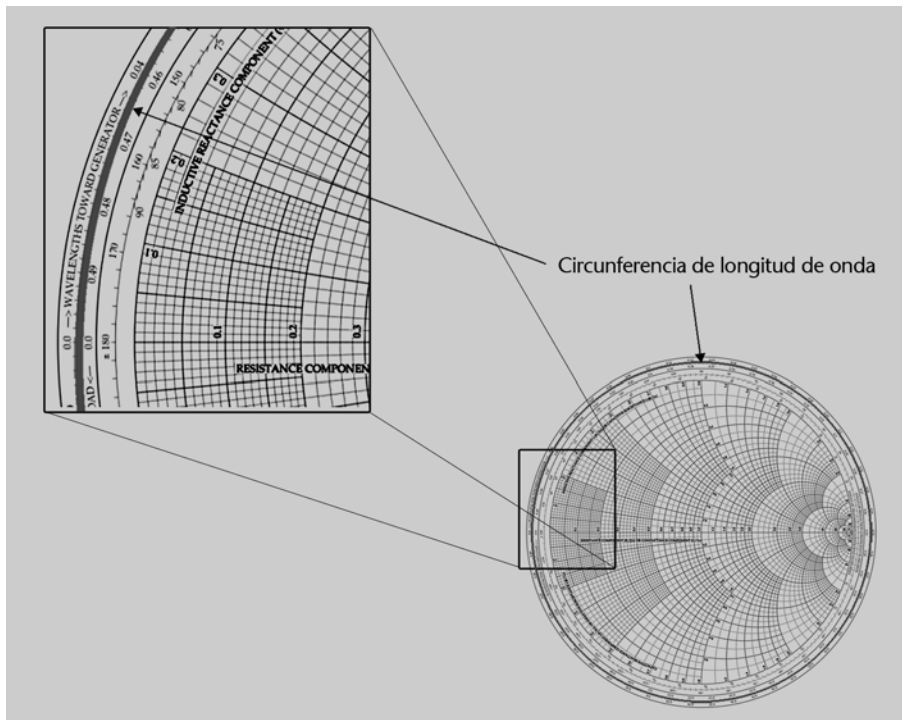
Circunferencia del ángulo del coeficiente de reflexión en grados sexagesimales.

- Una segunda circunferencia exterior donde se indica la longitud de onda, λ , de la señal sinusoidal que hemos introducido en la línea en relación con la longitud, l , de la propia línea (ved la figura 40) λ/l . Esta circunferencia nos permitirá propagar las impedancias y los coeficientes de reflexión, ρ , y transmisión, τ , en las dos direcciones de la línea de transmisión: hacia el generador y hacia la carga. Más adelante ya veréis cómo se utiliza.

Si os fijáis en el lado izquierdo de la circunferencia, veréis que está el 0, y en el otro extremo el $0,25\lambda$ (o $\lambda/4$). Esto refleja la propiedad de periodicidad cada $0,5\lambda$ (o cada $\lambda/2$) que ya hemos explicado.

Podéis ver la periodicidad en $\lambda/2$ en el subapartado 3.5 de este módulo.

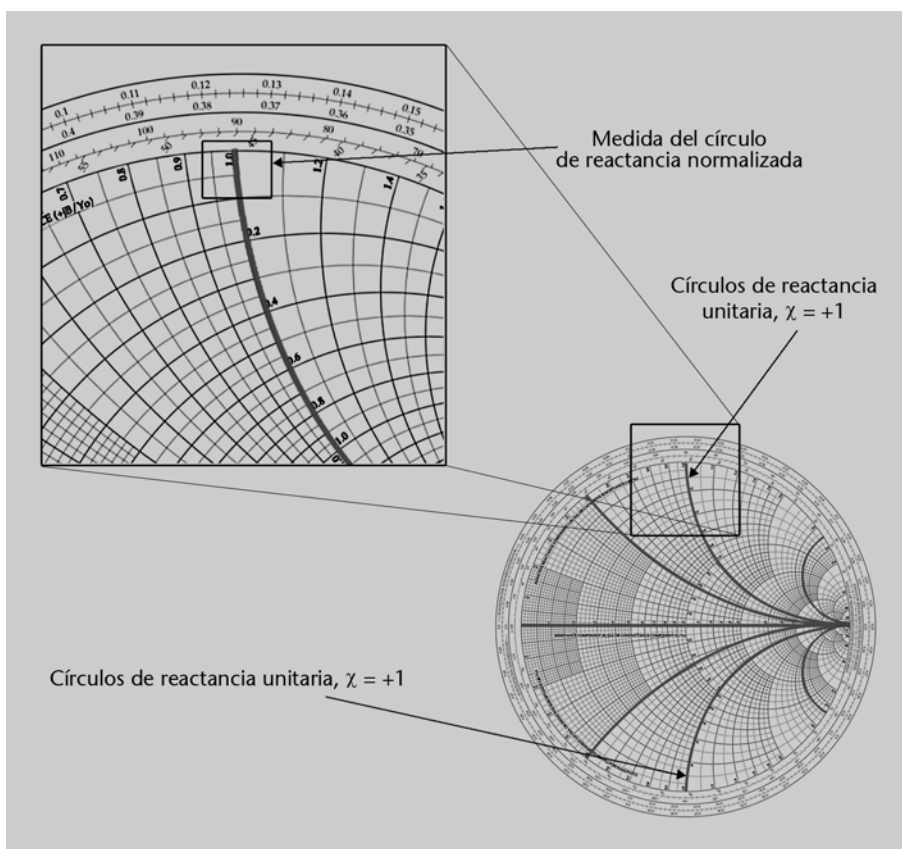
Figura 40

**Figura 40**

Circunferencia de longitud de onda que relaciona la frecuencia de la señal con la longitud de la línea, con doble medida, hacia el generador y hacia la carga.

- Unas curvas de reactancia constante (ved la figura 41).

Figura 41

**Figura 41**

Carta de Smith donde hemos resaltado las circunferencias de reactancia χ constante y las circunferencias de reactancia unitaria.

En estas curvas, la medida de la reactancia se puede leer en el punto donde la curva corta la circunferencia del perímetro o, en una medida más fina, en la circunferencia que corta el centro de la carta. Las circunferencias que

Recordad

La reactancia es la parte imaginaria de la impedancia y puede ser reactiva o capacitiva en función de si es positiva o negativa, respectivamente

cortarían el eje vertical que partiría la carta por la mitad son las circunferencias de reactancia unitaria $\chi = \pm 1$, y esta disminuye a medida que crece el radio de la circunferencia de reactancia constante.

En la figura 42 podéis ver más simplificadas las circunferencias de reactancia constante. En esta figura se han señalado:

- La circunferencia de reactancia cero, $\chi = 0$.
- La circunferencia de reactancia unitaria.
- Las circunferencias de casos intermedios con $\chi < 1$ y $\chi > 1$.

$$\chi = 0$$

La circunferencia de reactancia nula, $\chi = 0$, es una recta, y esta recta se puede considerar una circunferencia de radio infinito.

Figura 42

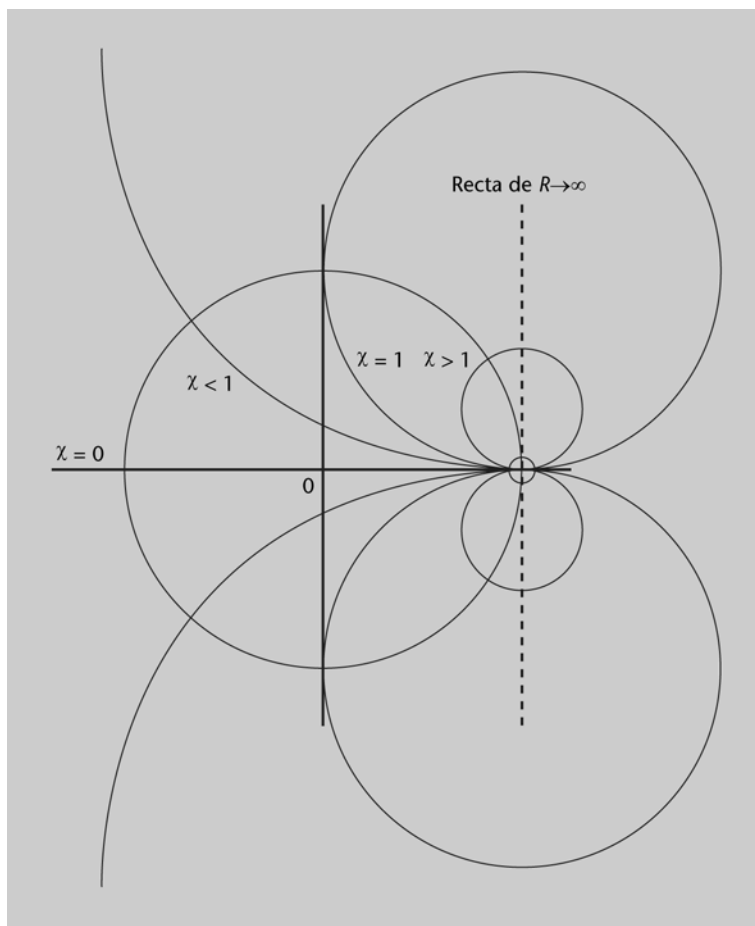


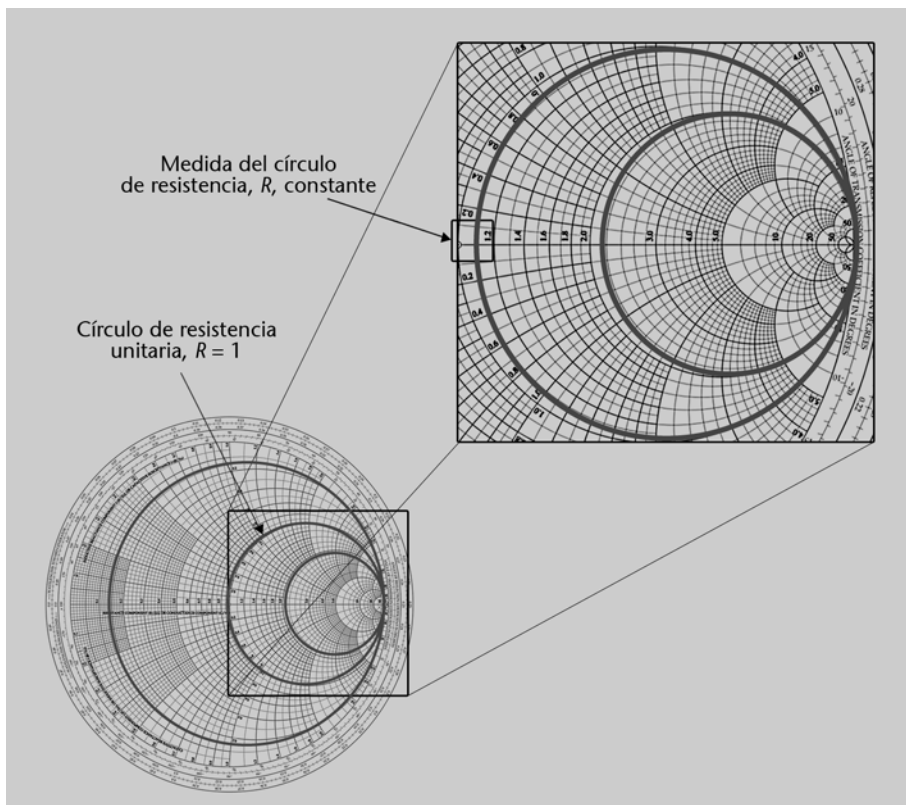
Figura 42

Circunferencias de reactancia constante para $\chi = 0$, $\chi < 1$, $\chi = 1$ i $\chi \rightarrow \infty$. Este primer caso se sitúa sobre el eje de ordenadas (horizontal).

- Unas curvas de resistencia constante (ved la figura 43)

La medida de la resistencia se realiza cuando la circunferencia corta el eje horizontal que divide la carta en dos hemisferios. La circunferencia que pasa por el centro de la carta es la circunferencia de resistencia unitaria $R = 1$, que va disminuyendo a medida que crece el radio de la circunferencia, y viceversa.

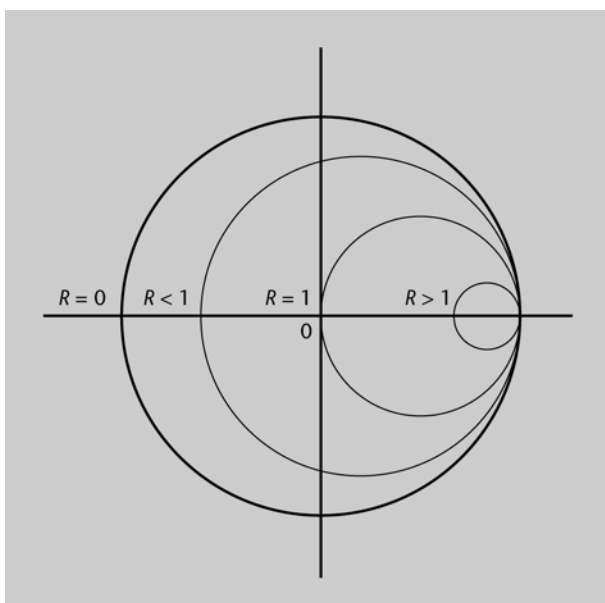
Figura 43

**Figura 43**

Circunferencias de resistencia R constante en la carta de Smith.

En la figura 44 podéis ver una simplificación de la estructura de las circunferencias de resistencia constante.

Figura 44



Si tenemos en cuenta estas circunferencias de resistencia constante, el coeficiente de reflexión varía según los diferentes casos en función del valor de R (ved la figura 44):

- Para $R = 0$ es una circunferencia de radio unitario, donde conviven los casos $R = 0$ y $\chi = 0$. Esta circunferencia es la que contendrá toda el resto de los valores de la carta y, por tanto, la circunferencia más externa.

- Circunferencia de $R < 1$. El centro de la circunferencia se encontrará a la izquierda del eje de coordenadas.
- Circunferencia de $R = 1$. La circunferencia se encuentra centrada sobre la parte positiva del eje de coordenadas.
- Circunferencia de $R > 1$. El centro de la circunferencia se encontrará a la derecha de la mitad positiva del eje de coordenadas.

A partir de las circunferencias de resistencia y de reactancia constante, podemos definir ciertas características de la carta de Smith:

a) Respecto a $R \rightarrow \infty$ y $\chi \rightarrow \infty$ y $R \rightarrow 0$ y $\chi \rightarrow 0$. Si buscamos estos puntos en la carta de Smith de la figura 44, encontramos:

- Que el punto de $R \rightarrow \infty$ y $\chi \rightarrow \infty$ se encuentra a la derecha del eje de abscisas y representa el circuito abierto. A todos los puntos del infinito de la carta de Smith, donde $R \rightarrow \infty$, $\chi \rightarrow \infty$ o ambos, les corresponde $\rho = 1$.
- Que el punto de $R \rightarrow 0$ y $\chi \rightarrow 0$ se encuentra a la izquierda del eje de abscisas y representa el cortocircuito. A valores de Z simétricos respecto al eje de las abscisas les corresponden valores de ρ también simétricos respecto al eje de abscisas. La razón de esto es que la carta es simétrica en los dos hemisferios divididos por la recta de resistencias.

Podéis ver el caso de un circuito abierto en el caso b del subapartado 1.8.1 de este módulo.
Podéis ver el caso de un cortocircuito en el caso c del subapartado 1.8.1 de este módulo.

b) En la base de la carta podéis observar cuatro rectas horizontales que presentan los valores de las atenuaciones de la línea (en decibelios), de las pérdidas, y lo que más nos interesa, del módulo del coeficiente de reflexión y de transmisión, indicados en la figura 45. El módulo del coeficiente de reflexión se puede leer en la mitad izquierda de la recta, en cambio, el coeficiente de transmisión se puede leer en la mitad derecha.

A partir de las ecuaciones del coeficiente de reflexión (46) y de la impedancia normalizada (102), podemos definir el coeficiente de reflexión tal como se lee en la carta de Smith, como:

$$\rho = \frac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1} \quad (128)$$

donde hemos dividido numerador y denominador de (46) por Z_0 y hemos definido $\bar{Z} = \frac{Z_L}{Z_0}$.

Ahora que ya habéis visto los componentes de la carta, veremos cómo se emplea.

Figura 45

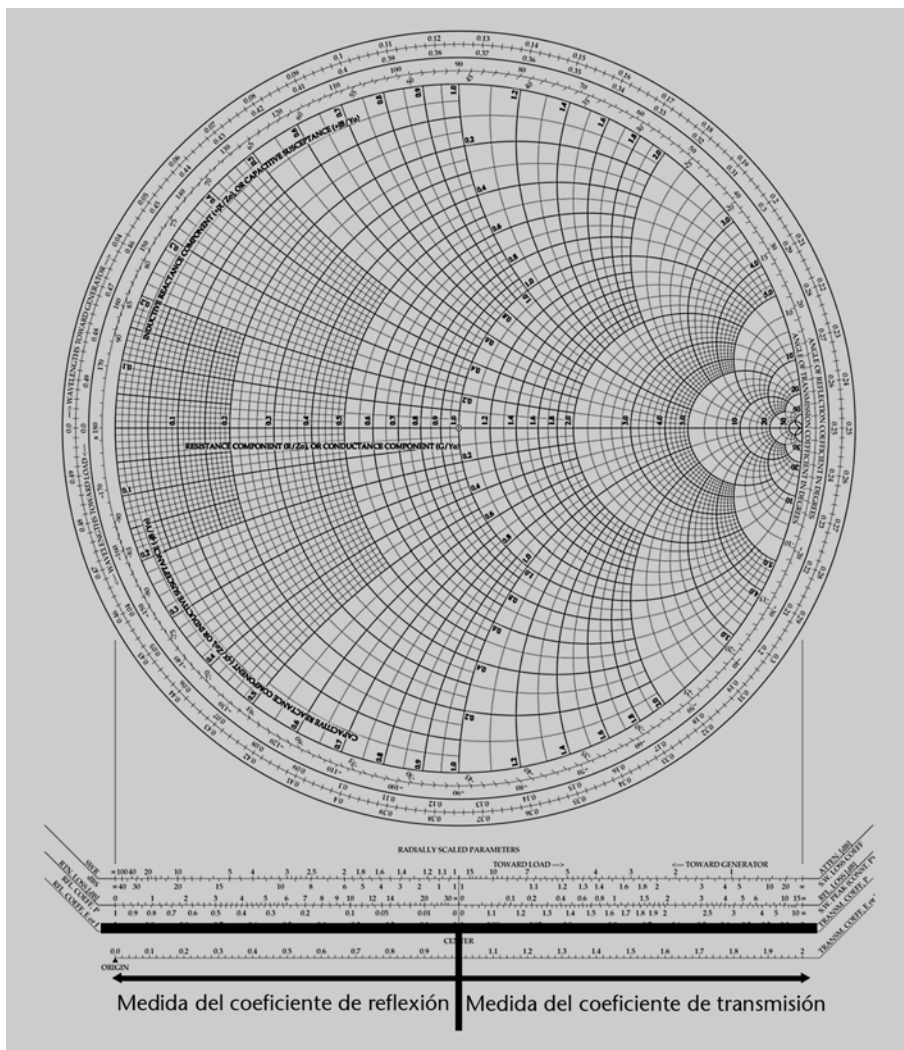


Figura 45

Coeficiente de reflexión y de transmisión como proyección de los parámetros de la carta.

4.2. Cómo se utiliza la carta de Smith

La carta de Smith está diseñada de manera que a partir de los valores de resistencia y reactancia se puedan leer, de manera casi automática, todos los valores de los coeficientes de reflexión y transmisión utilizando las rectas de la parte inferior y las circunferencias exteriores. En este apartado explicaremos cómo se lee la carta.

En el subapartado anterior habéis visto qué representan las circunferencias dibujadas en la carta de Smith y cuáles son los puntos más importantes en referencia a la impedancia normalizada (tanto para la resistencia como para la reactancia).

Antes de aprender a utilizar la carta de Smith, debéis tener en cuenta las siguientes consideraciones o propiedades de la carta:

a) La semicircunferencia superior, $\rho > 0$, corresponde a las impedancias inductivas (con reactancia positiva, $\chi > 0$) y la parte inferior, $\rho < 0$, a las capacitivas

Enlace de interés

Podéis consultar y realizar pruebas con una carta de Smith en la página web Interactive Smith Chart:
<http://www.amanogawa.com/archive/LossLessSmithChart/LossLessSmithChart-2.html>

(reactancia negativa, $\chi < 0$). Estas reactancias tienen el mismo módulo, pero cambia el signo debido a la fase.

b) Las resistencias normalizadas mayores que la unidad, $R > 1$, se encuentran contenidas en la circunferencia de resistencia constante que pasa por el origen. El punto del centro, $R = 1$, corresponde a la impedancia que adapta la línea. Recordad la figura 44.

c) El coeficiente de reflexión en una línea vale (recordad la ecuación (75)):

$$\rho(z) = \rho(0)e^{2j\beta z} \quad (129)$$

De manera que cuando nos movemos por toda la línea, el módulo del coeficiente de reflexión $|\rho(z)|$ es constante, mientras que su fase varía de manera directamente proporcional a la longitud (mirad el exponente de la ecuación (129)).

Podéis ver que la fase varía de manera directamente proporcional a la longitud en el subapartado 3.3 de este módulo. Podéis ver que el coeficiente de reflexión es periódico cada $\lambda/2$ en el subapartado 3.5 de este módulo.

Figura 46

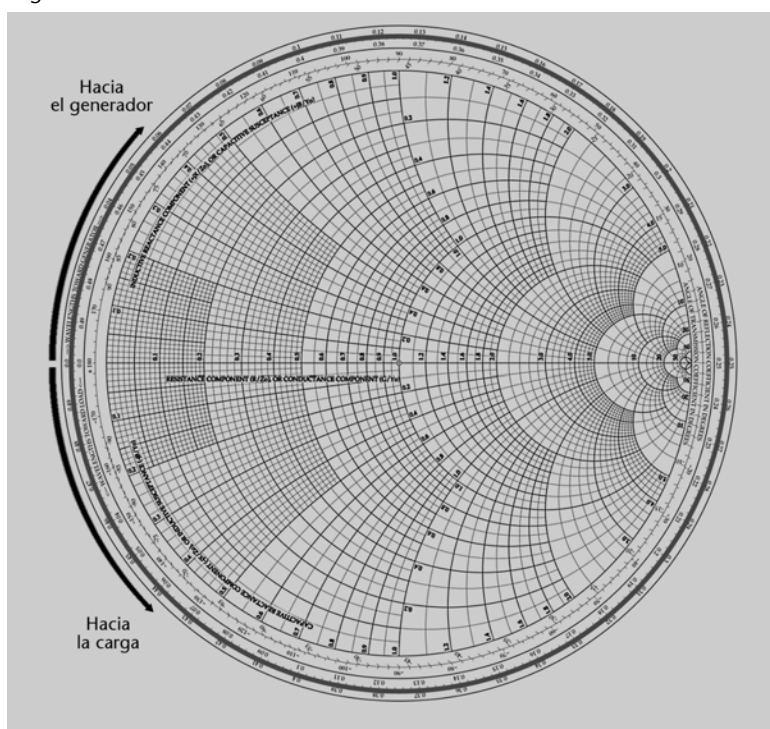


Figura 46

Direcciones de las longitudes de onda relativas a la frecuencia de la onda y la longitud de la línea de transmisión según si nos movemos en dirección al generador o a la carga.

Recordad que el coeficiente de reflexión es periódico cada $\lambda/2$. Esta es la razón por la que la circunferencia que mide la fase en una posición dada de la línea de transmisión puede tener valores de 0 a 0,5: no son necesarios más valores porque después de $\lambda/2$ todo se repite.

Así, la carta nos permite mantener el módulo fijo e ir leyendo el valor del coeficiente de reflexión a medida que varía su fase.

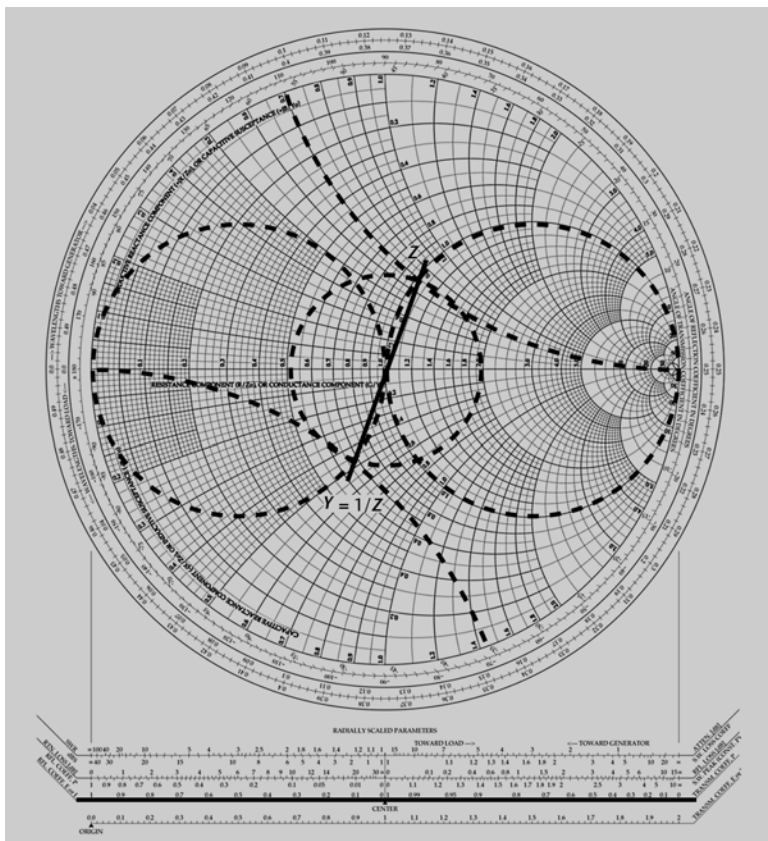
Observad que si nos movemos en sentido antihorario o positivo sobre la circunferencia de fase de la carta de Smith, nos movemos hacia la derecha de la

Podéis ver la descripción de la carta de Smith en el subapartado 4.1 de este módulo.

línea, o hacia la carga, y cuando lo hacemos en el sentido horario o negativo, hacia el generador (ved la figura 46).

d) Podéis calcular directamente el valor de la admitancia de una impedancia situada directamente en la carta a partir del punto simétrico respecto al centro de la carta (ved la figura 47). Recordad que para invertir la impedancia, sólo es necesario añadir una línea de longitud $\lambda/4$ o, lo que es lo mismo, dar una vuelta de 180° a la carta de Smith.

Figura 47

**Recordad**

La admitancia es el inverso de la impedancia:

$$Y = \frac{1}{Z}$$

Podéis ver que para invertir la impedancia solo es necesario añadir una línea de longitud $\lambda/4$ en el subapartado 3.6. de este módulo.

Figura 47

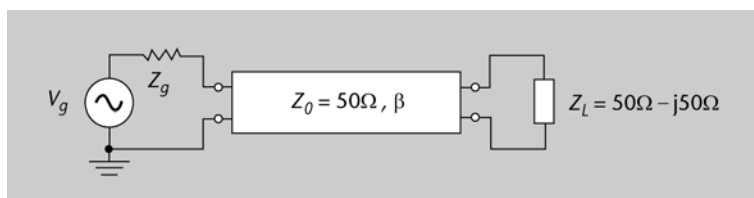
Lectura de los valores de admitancia $\bar{Y} = \frac{1}{Z}$ a partir del valor de la impedancia $\bar{Z}$.

Con estas propiedades bien entendidas, ya podemos pasar a ver un ejemplo de cómo utilizar la carta de Smith.

4.2.1. Ejemplo de utilización de la carta de Smith

Supongamos una línea de transmisión con impedancia característica $Z_0 = 50 \Omega$ y con una carga de impedancia $Z_L = 50 - j50 \Omega$, como la de la figura siguiente:

Figura 48

**Figura 48**

Línea de transmisión con impedancia característica $Z_0 = 50 \Omega$, e impedancia de carga $Z_L = 50 - j50 \Omega$.

Ahora calcularemos la impedancia normalizada y el coeficiente de reflexión.

Si partimos de la impedancia de carga:

$$Z_L = 50 - j50 \, \Omega \quad (130)$$

y expresamos esta impedancia de forma normalizada utilizando la ecuación (102), obtendremos:

$$\bar{Z} = \frac{Z_L}{Z_0} = 1 - j1 \, \Omega \quad (131)$$

Donde $\bar{Z}$ es la impedancia normalizada. Podemos separar la ecuación (131) en parte real, donde tendremos $R = 1$, y parte imaginaria, donde tendremos $\chi = -1$. El hecho de tener una reactancia negativa significa que esta reactancia es capacitiva.

Figura 49

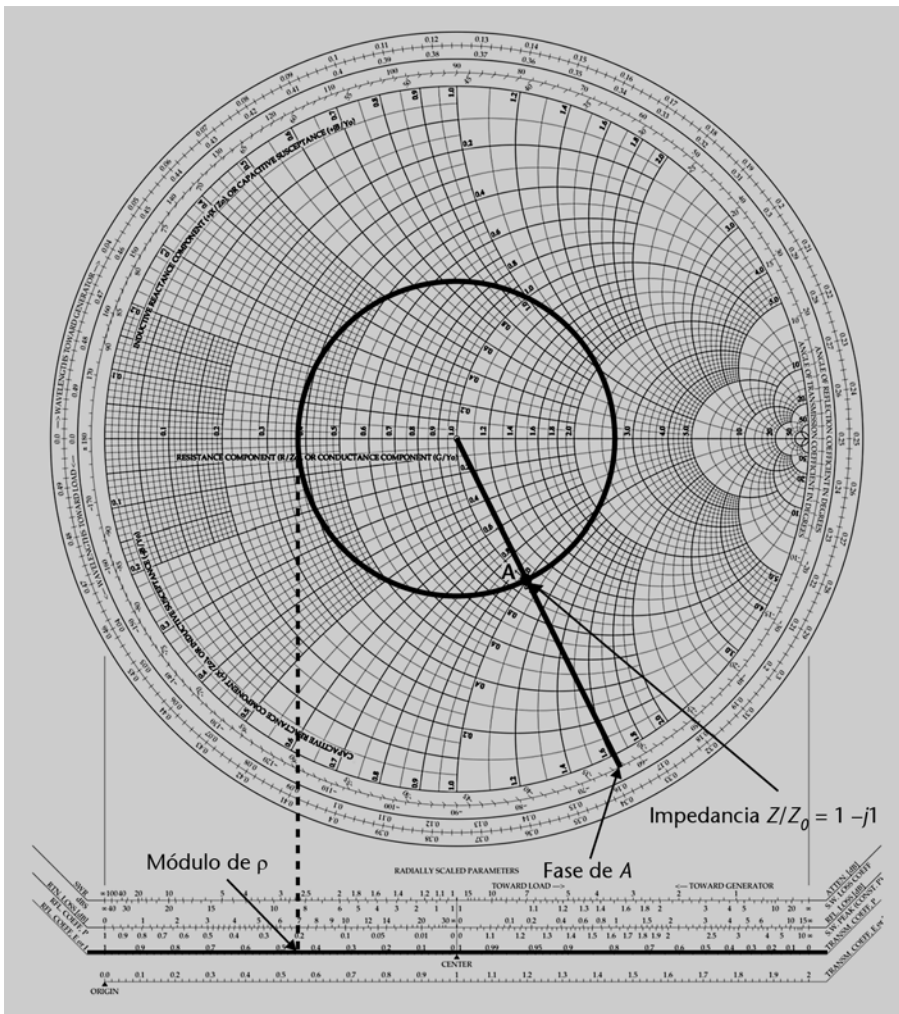


Figura 49

Ejemplo de cálculo del módulo y la fase del coeficiente de reflexión para una impedancia característica $\bar{Z} = 1 - j1 \, \Omega$ y una longitud de onda dadas.

Este punto se localiza en la carta de Smith mediante el punto donde confluyen la circunferencia de resistencia $R = 1$ y la circunferencia de reactancia capacitiva $\chi = -1$, tal como podéis ver en la figura 49 (recordad que la impedancia de la carta está normalizada respecto a la impedancia característica de la línea Z_0).

El coeficiente de reflexión ρ viene dado, en módulo, por la proyección del radio que genera la circunferencia que pasa por el punto de la impedancia normalizada, que está centrado en el centro de la carta (podéis ver la figura 49). Este coeficiente es único para todos los valores de las impedancias de la carta que cruza la circunferencia.

La fase se lee en la circunferencia exterior. Corresponde al punto en el que la cruza una recta que sale del centro de la carta y pasa por el punto de la impedancia normalizada. Así obtenemos un valor del coeficiente de reflexión complejo $\rho = 0,45e^{-j63,4}$ (ved la figura 49).

Si ahora nos movemos hacia el generador, el punto que nos indica la impedancia normalizada se mueve por encima de la circunferencia centrada en la carta en sentido horario. A medida que recorremos la circunferencia vamos cruzando diferentes circunferencias de resistencia constante, R , y reactancia constante, χ , por lo que obtenemos diferentes valores para la impedancia normalizada $\bar{Z}$.

Al mismo tiempo que nos movemos por encima de la circunferencia, también vamos variando la fase del coeficiente de reflexión (ved la figura 50).

Figura 50

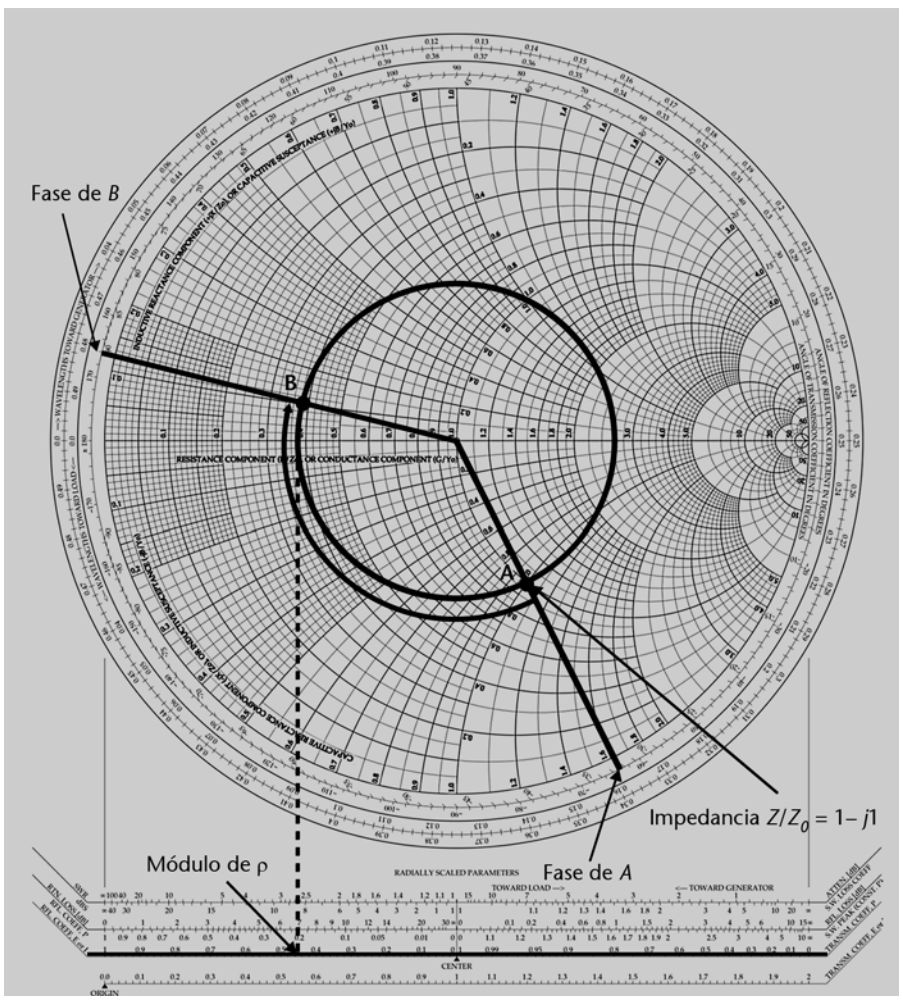


Figura 50

Movimiento de la impedancia del punto A ($\bar{Z} = 1 - j1$) hacia el generador hasta el punto B ($\bar{Z} = 0,38 + j0,1$).

Observad que los puntos A y B de la figura 50 presentan el mismo módulo del coeficiente de reflexión, $|\rho|$, lo que varía entre las dos impedancias es la fase del módulo, representadas como *Fase de A* y *Fase de B*.

4.2.2. Ejemplo de determinación de impedancias de carga

En el subapartado anterior hemos visto cómo calculamos el módulo y la fase del coeficiente de reflexión dada la impedancia de la carga. Ahora haremos el cálculo a la inversa, buscaremos la impedancia de carga dada una onda que circula por la línea de transmisión

Supongamos que tenemos una línea de transmisión con una impedancia característica $Z_0 = 50 \Omega$ y queremos transmitir una señal estacionaria con una frecuencia $f = 500$ MHz. La señal estacionaria que queremos transmitir tiene las siguientes características: el valor de amplitud de tensión máxima es $|V_{max}| = 6$ V; la amplitud de la mínima es $|V_{min}| = 3$ V, y la distancia de un mínimo voltaje a la carga es 142,5 cm. Con estos datos, queremos calcular la impedancia de carga, Z_L .

Figura 51

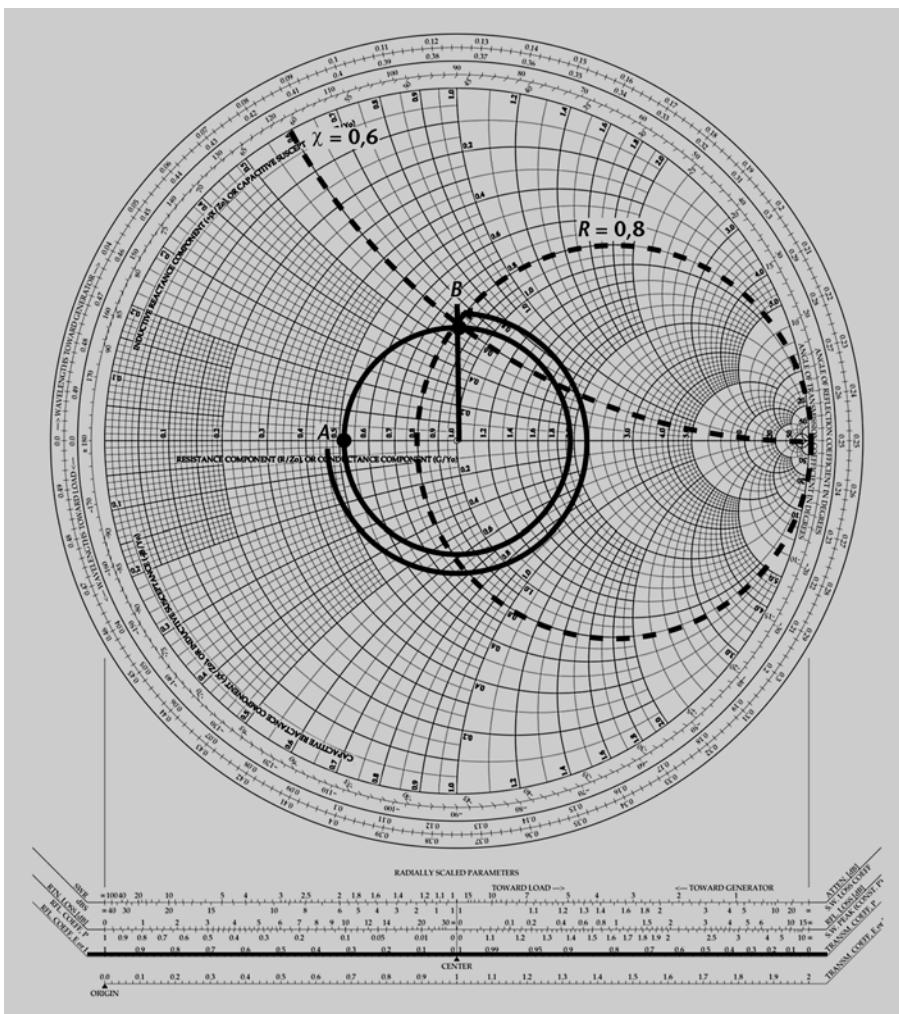


Figura 51

Punto A donde se cruzan la circunferencia de $R = 0,5$ y el eje $\chi = 0$ (eje horizontal), equivalente a $\bar{Z} = 0,5 + j0$, y propagación de la impedancia en dirección a la carga con una distancia de $3\lambda/8$ hasta el punto B, con una impedancia $\bar{Z} = 0,8 + j0,6$.

En primer lugar obtendremos el valor del parámetro de relación de onda estacionaria ROE o S (recordad la ecuación (117)), a partir del cual podemos obtener el módulo del coeficiente de reflexión $|\rho|$:

$$S = \frac{|V_{max}|}{|V_{min}|} = 2 \quad (132)$$

Y, según la ecuación (118), el módulo del coeficiente de reflexión vale:

$$|\rho| = \frac{(S - 1)}{(S + 1)} = \frac{1}{3} \quad (133)$$

Dado que la impedancia característica de la línea, Z_0 , es puramente resistiva y S no tiene unidades (ya que es la división de dos impedancias, recordad la ecuación (102)), $\bar{Z}$ también será puramente resistiva y, por tanto, su reactancia es $\chi = 0$.

Por otro lado, una señal con frecuencia $f = 500$ MHz tiene una longitud de onda $\lambda = 60$ cm. Este valor podemos calcularlo a partir de la ecuación (72):

$$\lambda \cdot f = c \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \rightarrow \lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^8} = 0,6 \text{ m} = 60 \text{ cm} \quad (134)$$

Ahora transformaremos la distancia en centímetros entre el mínimo de voltaje y la carga en longitudes de onda, para tenerlo todo en las unidades de la carta de Smith.

En el ejemplo que estamos considerando se nos dice que la distancia entre un mínimo de voltaje y la carga es $d_{min-L} = 142,5$ cm. A partir de esta información podemos extraer dos datos:

- La distancia d_{min-L} transformada en números de longitud de onda es:

$$\frac{d_{min-L}}{\lambda} = \frac{142,5 \text{ cm}}{60 \text{ cm}} = 2,375 = (2 + 0,375)\lambda = 2\lambda + \frac{3}{8}\lambda \quad (135)$$

y $2\lambda + 3\lambda/8$ equivale a $3\lambda/8$, a causa de la periodicidad de la carta de Smith. Es decir, si salen $2,375\lambda$, es como si construyésemos el número sumando fragmentos de $\lambda/2$ y nos acabásemos quedando con lo que queda cuando no hay suficiente para hacer un nuevo fragmento. Así, en la ecuación anterior tenemos cuatro fragmentos de $\lambda/2$, equivalente a 2λ , y $3\lambda/8$ es lo que queda.

- La posición de un mínimo de tensión, según la ley de Ohm, implica una impedancia mínima. Si buscamos el punto de mínima impedancia sobre la circunferencia correspondiente al coeficiente de reflexión $|\rho| = 1/3$, lo encontramos en $R = 0,5$ y $\chi = 0$ (punto A de la figura 51).

Una vez localizado en la carta el punto mínimo de impedancia, obtendremos la impedancia en la carga buscada al girar, en sentido antihorario (en dirección a la carga), el ángulo equivalente a $3\lambda/8$. Recordad que media circunferencia es equivalente a $\lambda/2$ y que $\lambda/8$ es $1/4$ de circunferencia; por tanto, $3\lambda/8$ es equivalente a $3/4$ de circunferencia.

Hecho esto, ya podemos leer sobre la carta de Smith una impedancia normalizada $\bar{Z} = (0,8 + j0,6)$, es decir, una impedancia de carga, Z_L :

$$\bar{Z} = 0,8 + j0,6 \quad (136)$$

Si tenéis en cuenta la ecuación (131),

$$Z_L = \bar{Z} \cdot Z_0 \quad (137)$$

el valor real, no normalizado, de la impedancia de carga es:

$$Z_L = (0,8 + j0,6) \cdot 50 = 40 + j30 \, \Omega \quad (138)$$

4.3. Precisión de la carta de Smith

A estas alturas ya habréis notado que en algunos casos puede ser un poco difícil medir con precisión el valor de la impedancia con la carta de Smith. La carta de la figura 38 está diseñada de manera que a medida que la distancia entre las circunferencias de resistencia constante, y de reactancia constante, se va haciendo más grande se introducen nuevas líneas para obtener una medida mejor (podéis ver la figura 52a). En la parte de la derecha de la carta sucede totalmente lo contrario, la precisión es mucho peor, ya que tenemos menos resolución (ved la figura 52b).

Figura 52

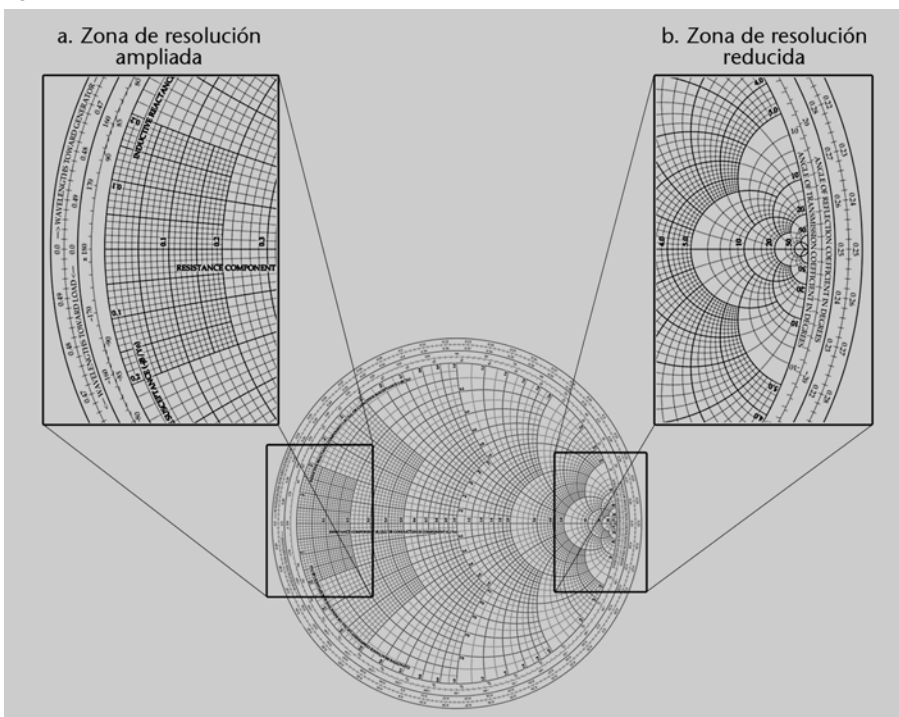


Figura 52

Zonas de la carta de Smith con resolución ampliada (a) y de resolución reducida (b).

La precisión de la carta es suficiente para la mayoría de los casos en los que os podéis encontrar, ya que la escala angular en el perímetro tiene divisiones de $1/500$ de longitud de onda (aproximadamente $0,72^\circ$) y la escala del coeficiente de reflexión se puede leer con una precisión de $0,002$.

Como ejemplo: tenemos un transmisor de radio y queremos hacer llegar la señal hasta una antena mediante una onda de frecuencia $f = 1.000$ MHz en un cable de $l = 20$ cm. La carta nos da una precisión de $20/500 = 0,4$ mm, y es muy difícil cortar un cable coaxial con esta precisión, teniendo en cuenta su anchura.

4.4. ¿Qué hemos aprendido?

En este apartado hemos definido los elementos que forman la carta de Smith y hemos estudiado cómo se utiliza esta herramienta.

También hemos aprovechado para poner dos ejemplos de utilización, calculando las impedancias características de las líneas de transmisión y determinando cómo se “propagan” los coeficientes de transmisión a lo largo de la línea.

Ahora aprovecharemos esta herramienta tan potente para ver cómo podemos adaptar las impedancias mediante unos ejemplos más prácticos.

5. Adaptación de impedancias

En el apartado anterior habéis visto cuáles son los elementos de la carta de Smith y cómo se utiliza esta para calcular coeficientes de transmisión y para propagar una impedancia a través de una línea de transmisión ideal. Ahora debemos pasar a un nivel más avanzado y utilizamos para ello la carta para adaptar la misma línea a una carga del tipo que sea, mediante la combinación en serie y en paralelo de estos elementos.

Observación

En algunos casos la propia línea de transmisión actúa como carga para otra línea de transmisión.

5.1. Adaptación en serie

Podemos tomar como ejemplo de adaptación en serie un circuito con una impedancia de carga normalizada de valor $\bar{Z}_L = (1,5 + j1)$, como el punto A de la figura 53.

Para adaptar la línea habrá que añadir un elemento en serie en uno de los puertos de la línea de transmisión. Dado que la carga que se ha de adaptar tiene componente real normalizado ($\bar{R} = 1,5$) e imaginaria normalizado ($\bar{X} = 1$), habría que poner un elemento que también tuviese componentes reales e imaginarios. Para simplificar este elemento adaptador, buscaremos el punto de la línea de transmisión donde tengamos la parte real igual a 1 (solo componente real) y así poder tener un coeficiente de reflexión $\rho = 0$ (recordad la ecuación (46)).

Recordad que $\bar{R}$ y $\bar{X}$ son valores normalizados y, por tanto, no tienen unidades.

Buscaremos el punto que corta la circunferencia de $R = 1$ de la carta más próximo **en dirección al generador**, ya que nos encontramos en la carga y solo podemos recorrer la línea en dirección al generador. Este punto es el valor $\bar{Z} = 1 - j0,91$ situado en el punto B de la figura 53, que se encuentra a una distancia $d = 0,148\lambda$ de la carga, que se sitúa en la posición $\bar{Z}_L = 1,5 + j1$ (punto A de la figura).

Lo que haremos será introducir una impedancia reactiva de valor $j\chi = +0,91$ en serie con la línea (podéis ver la figura 54), en el punto de la línea $0,148\lambda$ de la carga.

Lo que hemos hecho ha sido buscar la posición más próxima a la carga en la que tenemos una impedancia equivalente a $\bar{Z} = 1 - j0,91$ (en este caso $d = 0,148\lambda$), y hemos introducido en ella una reactancia para compensar la parte imaginaria.

Figura 53

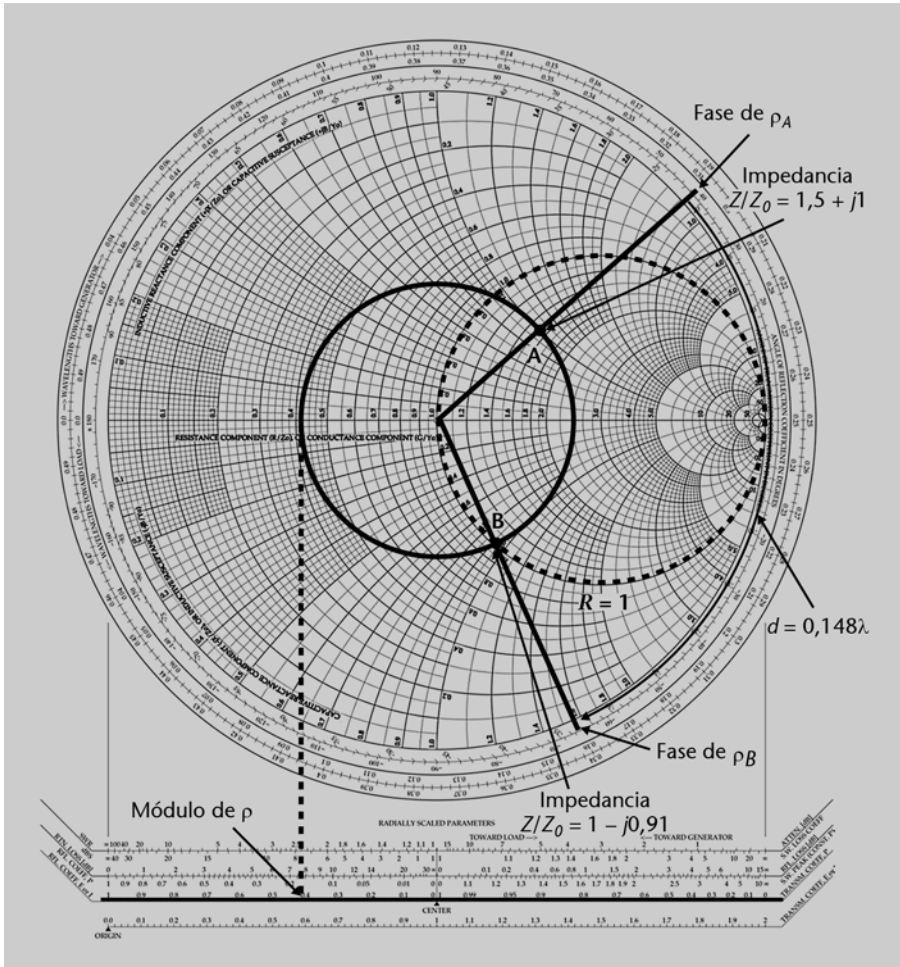
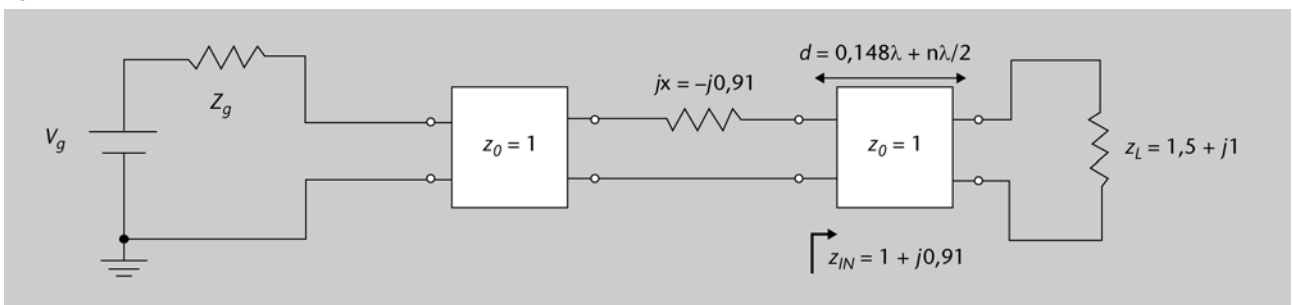


Figura 53

Representación sobre la carta de Smith de la impedancia de carga $\bar{Z}_L = 1,5 + j1$ (punto A), de la impedancia normalizada $\bar{Z} = 1 - j0,91$ (punto B) y de su distancia $d = 0,148\lambda$ sobre la circunferencia de longitudes de onda.

Figura 54



La línea de transmisión queda adaptada ya que:

$$\bar{\bar{Z}} = (1 - j0,91) + j0,91 = 1 \quad (139)$$

Recordad que la línea está adaptada cuando transmite toda la potencia a la carga y, por tanto, no hay onda reflejada. Este hecho se da cuando el coeficiente de reflexión es cero, $\rho = 0$, lo que podéis comprobar sustituyendo el resultado de la ecuación (139) en la ecuación del coeficiente de reflexión (ecuación (46)):

$$\rho = \frac{\bar{\bar{Z}} - 1}{\bar{\bar{Z}} + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0 \quad (140)$$

Figura 54

Circuito con una línea de transmisión en la que hemos introducido una impedancia reactiva de valor $jx = +j0,91$ a una distancia $0,148\lambda$ de la carga.

5.2. Adaptación en paralelo

El procedimiento de adaptación en serie no es el más utilizado, ya que implica “abrir” la línea de transmisión para introducir la impedancia en serie dentro de uno de los conductores de la línea.

Lo más usual es utilizar una impedancia colocada en paralelo con la línea, ya que solo necesitaremos conectarla entre los dos conductores.

Para hacer la adaptación en paralelo trabajaremos con las admitancias en lugar de las impedancias, para simplificar las ecuaciones.

La estrategia que seguiremos será la misma que en el caso anterior: buscaremos un elemento en paralelo que nos adapte la línea en función de la impedancia característica de la línea y de su carga.

Figura 55

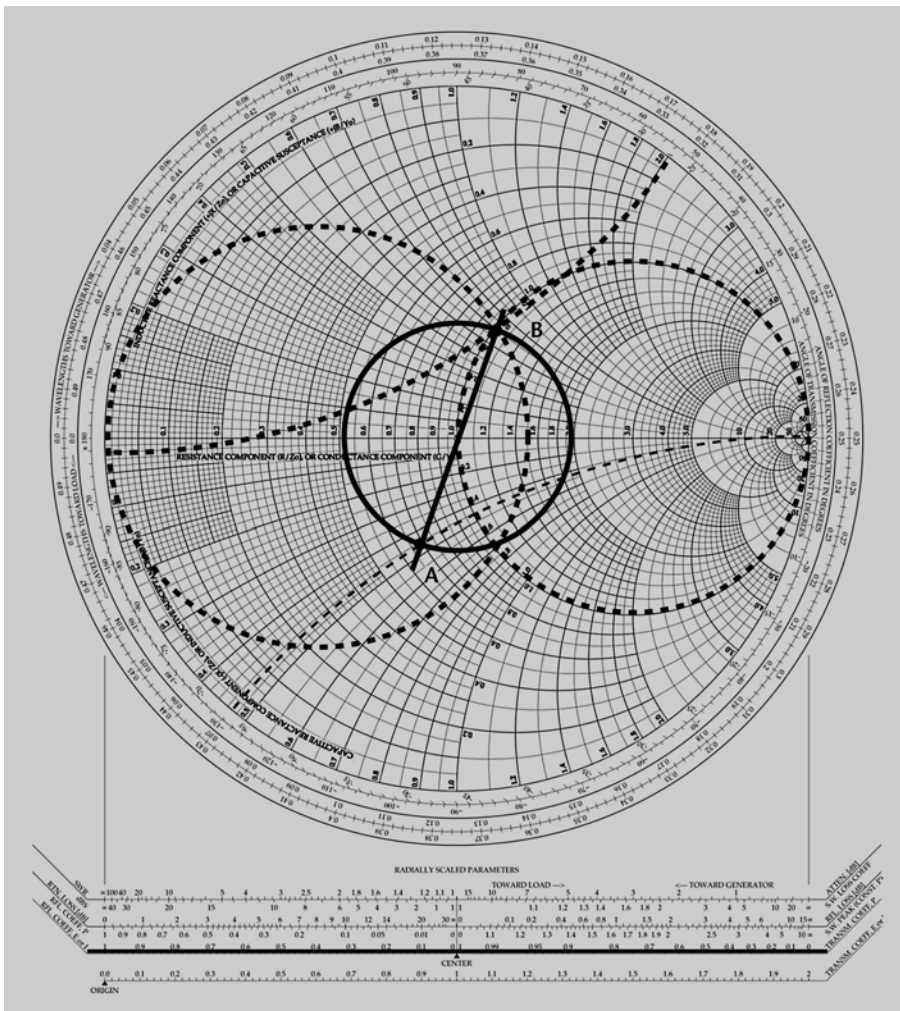


Figura 55

Representación de la impedancia $\bar{Z} = 0,67 - j0,46$, punto A, y de su admitancia

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = 1 + j0,7, \text{ punto B.}$$

Si, como ejemplo, tomamos un valor de impedancia normalizada $\bar{Z} = 0,67 - j0,46$, obtenemos un valor de admitancia normalizada, $\bar{Y}$:

$$\bar{Z} = 0,67 - j0,46 \quad (141)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{(0,67 + j0,46)} = \frac{(0,67 - j0,46)}{(0,67 - j0,46)(0,67 + j0,46)} \quad (142)$$

Y, por tanto:

$$\bar{Y} = 1 + j0,7 \quad (143)$$

En la figura 55 podéis ver la representación de la impedancia normalizada $\bar{Z}$ y de su admitancia normalizada $\bar{Y}$.

En este caso, la distancia en longitudes de onda entre la admitancia normalizada de la línea de transmisión $\bar{Y}$ (punto B de la figura 56) y la impedancia normalizada de la carga $\bar{Z}_L$ (punto A de la figura 56) es de $0,277\lambda$.

Recordad

La susceptancia, B, es la equivalente a la reactancia, χ , en la admitancia compleja.

Figura 56

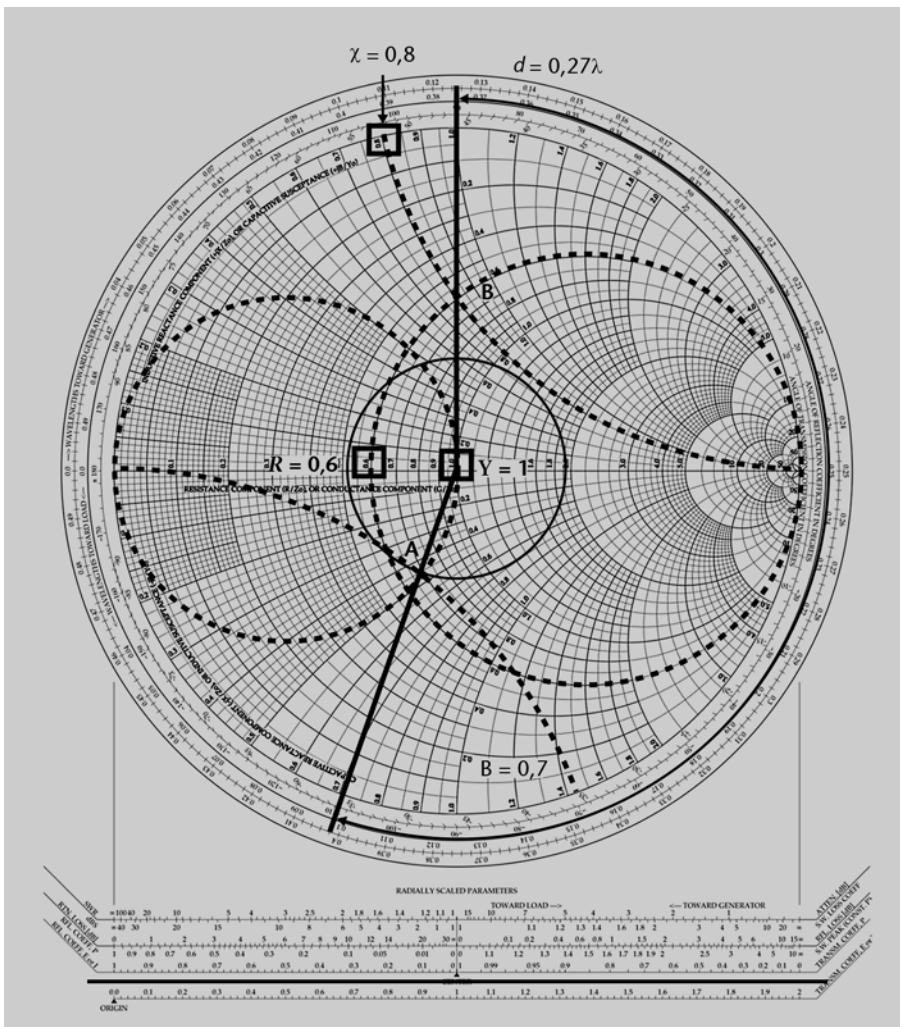
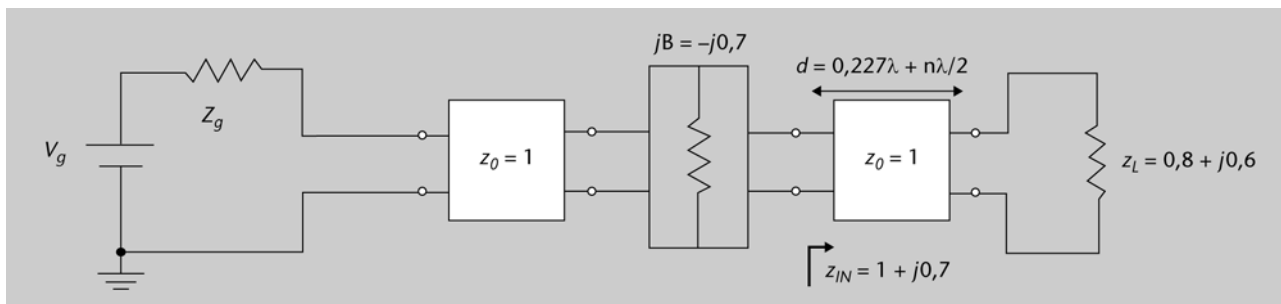


Figura 56

Representación de la admitancia $\bar{Y} = 1 + j0,7$, punto A, y la impedancia de carga, $\bar{Z}_L = 0,6 + j0,8$, punto B, separadas por una distancia en longitudes de onda $d = 0,277\lambda$.

Si añadimos en paralelo una susceptancia cualquiera de valor $\bar{Y} = 0 + jB = 0 - j0,7$, la admitancia que se obtiene directamente es $\bar{Y} = 1$ y, así, la línea queda adaptada (ved la figura 57).

Figura 57



No es necesario ir añadiendo impedancias y admitancias para adaptar líneas de transmisión. En algunos casos podemos utilizar líneas de transmisión como elementos adaptadores.

Tanto en el caso anterior de adaptación de impedancias en serie como en este caso, podéis utilizar un trozo de línea con un circuito abierto (en el caso de adaptación en paralelo) o con un cortocircuito (en el caso de adaptación en serie) para obtener los valores de reactancia necesarios para conseguir la adaptación de la línea principal en su carga.

Esto se debe al hecho de que, en el caso de la adaptación en serie, al tener una línea de transmisión en cortocircuito, tenemos resistencia cero, $R = 0$, por lo que solo nos afecta la parte reactiva de la línea. En este caso nos encontraríamos sobre la circunferencia más externa de la carta de Smith. El caso contrario lo podemos aplicar en el caso de la adaptación en paralelo y una línea de transmisión en circuito abierto.

5.3. Transformador $\lambda/4$

Como acabamos de decir, las líneas de transmisión también se pueden utilizar como elementos adaptadores.

Aparte del procedimiento de adaptación de impedancias explicado en el subapartado anterior, también podemos utilizar el transformador en $\lambda/4$ como un recurso más para adaptar impedancias.

Esta metodología aprovecha la propiedad de inversión de impedancias de las líneas $\lambda/4$ que ya hemos explicado.

En este caso adaptaremos una carga resistiva Z_L , ($Z_L = R_L$) a una línea de impedancia característica Z_0 , mediante otra sección de línea de transmisión con impedancia característica (podéis ver la figura 58):

$$Z'_0 = \sqrt{Z_0 Z_L} \quad (144)$$

Figura 57

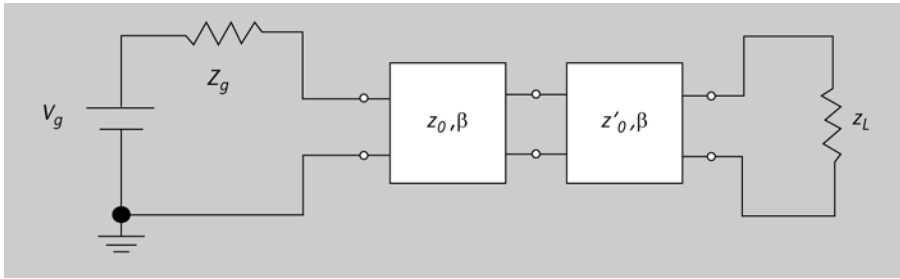
Circuito con adaptación de la línea de transmisión con una susceptancia en paralelo.

Podéis ver la propiedad de inversión de impedancias de las líneas $\lambda/4$ en el subapartado 3.6. de este módulo.

Transformadores

Utilizaremos el término *transformador* para expresar que el efecto de introducir una línea de longitud $\lambda/4$ provoca un cambio en la impedancia característica de la línea de transmisión, Z_0 .

Figura 58

**Figura 58**

Línea de transmisión con impedancia Z_0 adaptada a la carga Z_L mediante otra línea de transmisión con impedancia característica Z'_0 .

Para una línea de transmisión de longitud $l = \lambda/4$ obtenemos (recordad las ecuaciones (77) o las (99) y (100)):

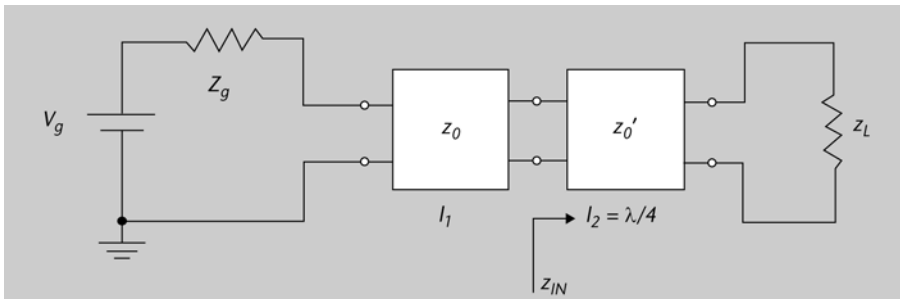
$$\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l \rightarrow \beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} \rightarrow \beta l = \frac{\pi}{2} \quad (145)$$

de manera que según la ecuación (101) podemos calcular la impedancia de entrada utilizando la ecuación (144):

$$Z_{IN} = \frac{Z_0'^2}{R_L} = \frac{Z_0 R_L}{R_L} = Z_0 \quad (146)$$

En la figura 59 tenéis el circuito con la línea de transmisión con una impedancia característica Z_0 , y la línea $\lambda/4$ que utilizamos para realizar la adaptación a la impedancia de carga Z_L .

Figura 59

**Figura 59**

Circuito con adaptación de impedancias que utiliza una línea de longitud $\lambda/4$.

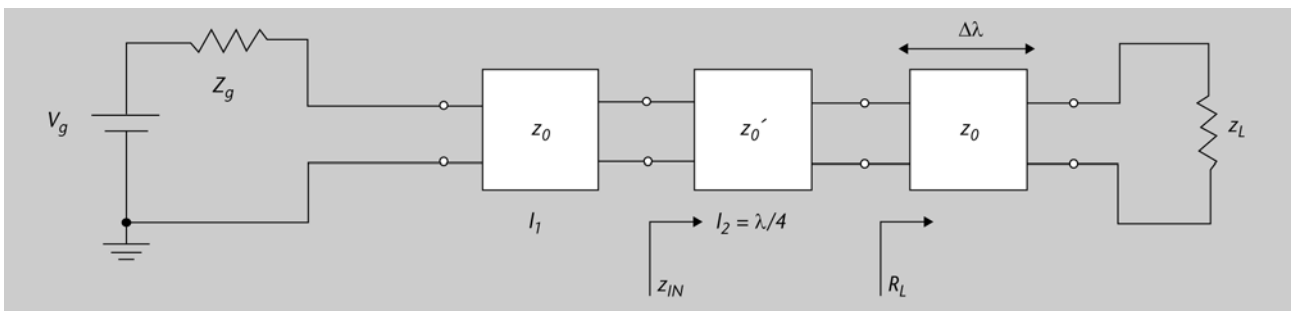
En el caso de que la carga no sea puramente resistiva, tenéis dos opciones:

- Introducir el transformador $\lambda/4$, o una línea de transmisión de longitud $\lambda/4$, en un punto de la línea de transmisión en el que la impedancia de entrada sea puramente resistiva. Esto lo hacemos añadiendo la línea de longitud $l = \lambda/4$ a una distancia $\Delta\lambda$ de la carga (podéis ver la figura 60).

Figura 60

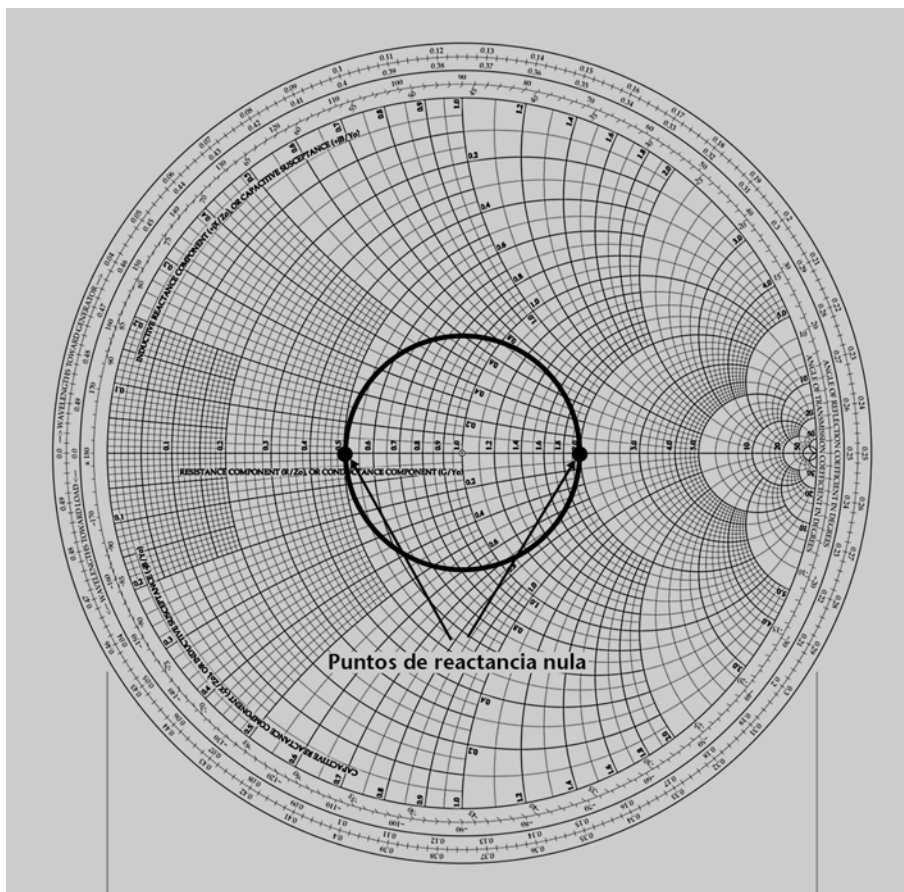
Adaptación de impedancias mediante la inserción de una línea $\lambda/4$ a una distancia de la carga en la que la impedancia sea puramente resistiva (R_L).

Figura 60



Así nos moveremos desde la carga, Z_L , hasta el generador. De este modo estamos repasando la circunferencia centrada en la carta y en algún punto de la línea cortaremos la recta de impedancias puramente resistivas (eje horizontal), o de reactancia nula $\chi = 0$ (ved la figura 61).

Figura 61

**Figura 61**

Puntos de la circunferencia centrada en la carta de Smith que cortan la recta de reactancia nula, $\chi = 0$.

- Otra opción es cancelar la parte reactiva de la impedancia de carga con un elemento reactivo en serie o en paralelo, como en los ejemplos de las figuras 54 y 57, y después añadir el transformador $\lambda/4$.

5.4. ¿Qué hemos aprendido?

La aplicación de la carta de Smith nos ha permitido adaptar impedancias en serie y en paralelo de manera rápida y sencilla.

También hemos visto cómo podemos utilizar las características de las líneas de transmisión de longitud $\lambda/4$ para ayudarnos en las adaptaciones de impedancias. Hay que recalcar que la carta de Smith no solo nos ha sido útil para calcular los parámetros de los elementos que debemos utilizar a la hora de adaptar las líneas (su impedancia), sino que también nos ha sido útil para saber en qué posición de la línea se deben colocar estos elementos (como la línea de $\lambda/4$).

6. Tipos de líneas de transmisión

Después de haber iniciado, en el primer apartado, un recorrido en el que habéis descubierto las características principales de los modelos aproximados de líneas de transmisión, y algunas de sus aplicaciones a lo largo del segundo apartado, habéis visto cómo se iba complicando todo. Afortunadamente, en el tercer apartado hemos descubierto la carta de Smith, una herramienta que nos facilita mucho los cálculos y que nos permite tener una idea muy visual del funcionamiento de las líneas de transmisión y de su adaptación.

Para finalizar este módulo, haremos un repaso rápido a algunos de los tipos de líneas de transmisión más importantes que podéis encontrar en cualquier parte. Desde las líneas coaxiales del primer ejemplo (el cable de la antena del televisor) hasta las líneas integradas en circuitos de alta frecuencia, que aparecen encastadas directamente sobre las placas impresas de algunos aparatos.

Hay que remarcar que durante todo el módulo hemos tratado las líneas de transmisión como si fuesen líneas ideales, o sin pérdidas. Ahora veremos que algunas de las características principales de las líneas que ahora presentaremos se basan precisamente en las pérdidas.

Por esta razón, en primer lugar haremos una pequeña introducción a las pérdidas en las líneas de transmisión y veremos cómo estas pérdidas afectan a las ecuaciones que hemos visto hasta ahora. Después introduciremos los distintos tipos de línea. Hay que señalar que solo presentaremos las ecuaciones que definen las características básicas de las líneas de transmisión y que no desarrollaremos la matemática correspondiente a su deducción.

6.1. Pequeña introducción a las pérdidas

Dentro del modelo equivalente de líneas de transmisión presentado en el primer apartado, podemos considerar que se hallan los siguientes efectos que provocan pérdidas en la línea:

- Pérdidas del propio conductor
- Pérdidas por radiación
- Pérdidas por el calentamiento del dieléctrico
- Pérdidas por acoplamiento y descarga

6.1.1. Pérdidas del conductor

Toda resistencia por la que circula una corriente provoca una pérdida de potencia. Estas pérdidas serán función de:

- la longitud de la línea y

- la amplitud del conductor.

Por tanto, para reducir las pérdidas del conductor, sólo debemos emplear una línea más corta, o un conductor más amplio.

Hay que tener en cuenta que parte de esta pérdida de potencia se debe a un efecto denominado *efecto pelicular*, que es función de la frecuencia de la señal que circula por la línea.

Las causas del efecto pelicular

El efecto pelicular se produce en un conductor debido a la circulación de una corriente por su interior. Al tener una corriente que circula por el interior del conductor, se crean unas líneas de campo magnético más intensas en el interior del conductor que en su superficie. Estas líneas de campo magnético provocan una disminución del flujo de corriente y aumentan el flujo en una zona próxima a la superficie del conductor.

6.1.2. Pérdidas por radiación

Las pérdidas por radiación se deben al hecho de que los campos electromagnéticos provocan que el conductor se comporte como una antena e irradie energía hacia el exterior.

Veréis qué es una antena en el módulo "Radiación".

La cantidad de energía radiada dependerá:

- del material utilizado como dieléctrico,
- de la distancia entre los conductores,
- de la longitud de la línea.

6.1.3. Pérdidas por calentamiento del dieléctrico

Cuando tenemos una diferencia de potencial entre dos conductores se produce un efecto capacitivo que provoca el calentamiento del dieléctrico. Este calentamiento se puede propagar a lo largo de la línea de transmisión.

En algunos casos (como en las líneas bifilares) el dieléctrico es el aire, por lo que este efecto será inferior frente a otros tipos de pérdidas que pueda tener la línea de transmisión.

Podéis ver las líneas bifilares en el subapartado 1.2.2. de este módulo.

6.1.4. Pérdidas por acoplamiento y descarga

Las pérdidas por acoplamiento se dan cuando, tal como indica su nombre, se produce una conexión entre dos líneas de transmisión. Estas uniones se pueden hacer de muchas maneras diferentes, pero son estas mismas conexiones mecánicas las que provocan estas pérdidas por acoplamiento.

Las pérdidas por descarga (o corona) se producen cuando la diferencia de potencial entre los dos conductores supera la tensión de ruptura del material y se genera una descarga entre un conductor y otro.

Tensión de ruptura

La tensión de ruptura es el voltaje mínimo a partir del cual un material aislante se convierte en conductor.

6.2. Parámetros característicos de las líneas de transmisión con pérdidas

Hasta ahora hemos considerado líneas ideales y hemos ignorado:

- la resistencia de los conductores R ,
- la posible conductividad G del medio dieléctrico que forma parte de las líneas (recordad la figura 15).

Una de las primeras consecuencias de las pérdidas en las líneas de transmisión es la aparición de la dispersión, es decir, el fenómeno por el que las señales sinusoidales que se transmiten por la línea con frecuencias diferentes lo hacen con velocidades de fase diferentes. Esto lo podéis observar a partir de la ecuación (71), en la que, para una misma línea con constante de fase β , la velocidad de fase de la señal sinusoidal, v_f , varía en función de la frecuencia f .

Podéis ver que las señales sinusoidales de frecuencias diferentes se transmiten con velocidades de fase diferentes en el subapartado 0. de este módulo.

$$\beta = \frac{\omega}{v_f} \rightarrow v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} \quad (147)$$

Observad que la ecuación (147) se diferencia de la ecuación (71) por el hecho de haber sustituido la velocidad de la luz por una velocidad de fase, v_f .

Ahora partimos de la ecuación (15), en la que se define la constante de propagación γ como:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad (148)$$

donde β es la constante de fase y α la constante de atenuación con dimensiones de metro elevado a menos 1 (m^{-1}). Dado que la constante de propagación puede tener un valor real o complejo, las ecuaciones de la tensión y de la corriente (ecuaciones (16) y (17)) en la línea no cambiarán cuando calculemos estas ecuaciones en el caso de que haya atenuaciones:

$$v(z,t) = V^+ e^{(j\omega t - \gamma z)} + V^- e^{(j\omega t + \gamma z)} \quad (149)$$

$$i(z,t) = I^+ e^{(j\omega t - \gamma z)} + I^- e^{(j\omega t + \gamma z)} \quad (150)$$

Una vez que tenemos las ondas de tensión y corriente cuando se producen atenuaciones, podemos calcular la impedancia característica de la línea de transmisión. Si recordáis las ecuaciones (20), (21) y (26) y aplicamos la ley de Ohm, podemos concluir:

$$\frac{v^+}{i^+} = \frac{V^+}{I^+} = Z_0 = \alpha + j\beta = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \quad (151)$$

donde Z representa la impedancia en serie e Y la admitancia en serie. Los valores de Z e Y vienen dados por las ecuaciones siguientes:

$$Z = R' + j\omega L' \quad (152)$$

$$Y = G' + j\omega C' \quad (153)$$

6.2.1. Líneas de pérdidas bajas

Si utilizamos las líneas para transmitir señales en una frecuencia de la banda de microondas, es decir, de alta frecuencia, se da el caso de líneas con pérdidas bajas. Esto lo podéis ver en el hecho de que las componentes resistivas debidas a la inductancia y a la capacitancia son mayores que las debidas a los efectos de la resistencia y la conductividad:

$$\omega L' \gg R' \quad (154)$$

$$\omega C' \gg G' \quad (155)$$

y entonces podemos deducir los valores de la constante de fase, β , y de la atenuación, α , aplicando las aproximaciones de las ecuaciones (154) y (155) en la ecuación (151):

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \quad (156)$$

$$\alpha = \frac{R}{2Z_0} + \frac{Z_0 G}{2} \ll \beta \quad (157)$$

donde Z_0 es la impedancia característica de la línea, que es el caso que hemos estudiado durante todo el módulo.

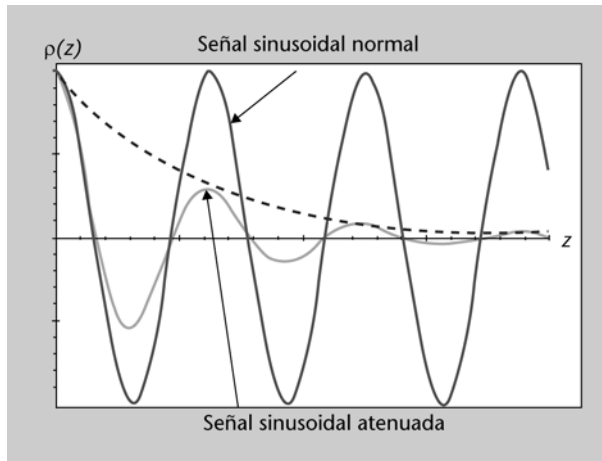
6.2.2. Efecto de la atenuación en el coeficiente de reflexión

Si ahora tenemos en cuenta los efectos de la atenuación α en el cálculo del coeficiente de reflexión, obtendremos, a partir de la ecuación (75):

$$\rho(z) = \rho_L e^{j2\gamma z} = \rho_L e^{-2\alpha z} e^{-j2\beta z} \quad (158)$$

En este caso sí que tenemos un efecto atenuador en el coeficiente de reflexión, ya que lo tenemos multiplicado por una función exponencial con exponente negativo (ved la figura 62).

Figura 62

**Figura 62**

Coeficiente de reflexión $\rho(z)$ afectado por una atenuación exponencial negativa (línea punteada) en función de la distancia, z .

De la misma manera se verán afectadas las ecuaciones de la corriente y la tensión en la línea de transmisión, ecuaciones (65) y (66), ya que sustituiremos el factor γ por las mismas exponenciales de la ecuación (158).

$$v^+(z, t) = |V^+| e^{-\alpha z} e^{j\omega t} e^{-j\beta z} \quad (159)$$

$$i^+(z, t) = \frac{|V^+|}{Z_0} e^{-\alpha z} e^{j\omega t} e^{-j\beta z} \quad (160)$$

Ahora que ya os hemos presentado las principales causas de las pérdidas en las líneas de transmisión y habéis visto su efecto en las ecuaciones que hemos desarrollado a lo largo de todo el módulo, veamos algunos de los tipos de líneas más utilizados.

6.3. Tipos de líneas de transmisión

En este subapartado introduciremos algunos de los diferentes tipos de líneas de transmisión que se utilizan más usualmente en los dispositivos actuales.

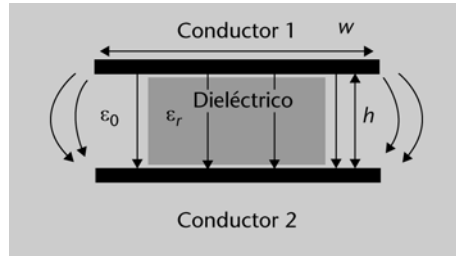
Debéis tener en cuenta que no demostraremos las ecuaciones que presentaremos para cada tipo de línea.

6.3.1. Líneas de placas paralelas

Las líneas de transmisión denominadas *de placas paralelas* están formadas por dos tiras de material conductor de amplitud w dispuestas en paralelo y separadas por una distancia h por un material dieléctrico.

Su análisis puede llegar a ser muy complicado, ya que al tener dos placas paralelas, como en un condensador, existen unas líneas de campo que no van de una placa a la otra siguiendo un camino perpendicular a las placas, sino que pasan por el exterior del espacio entre los conductores (ved la figura 63). La distorsión creada por estas líneas de campo se denomina **efecto frontera**.

Figura 63



Es bastante difícil realizar un cálculo exacto de los efectos que crean estas líneas de campo no perpendiculares, pero podemos simplificar los cálculos cuando la amplitud del condensador es mucho mayor que la distancia entre las placas, $w \gg h$. Es entonces cuando la capacidad del sistema se puede calcular utilizando la ecuación del condensador plano:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{w}{h} \quad (161)$$

donde:

- ϵ_0 es la constante dieléctrica del vacío,
- ϵ_r es la constante dieléctrica relativa del medio,
- w es la amplitud de las placas conductoras, y
- h es la distancia entre las dos placas.

ϵ es la letra griega épsilon minúscula.

La impedancia característica de la línea se puede calcular utilizando la ecuación:

$$Z_0 = \frac{l}{v_p c} = \frac{\sqrt{\epsilon_r}}{c C} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{h}{w} \quad (162)$$

Con esta aproximación, la corriente está uniformemente distribuida y el parámetro R' (resistencia por unidad de longitud) es:

$$R' = 2 \frac{R_s}{w} \quad (163)$$

donde expresamos la resistencia total del conductor como:

$$R_s = \frac{1}{\delta \sigma} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} \quad (164)$$

donde σ es la conductividad del conductor y δ la profundidad de penetración en el conductor en la frecuencia f :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \quad (165)$$

δ es la letra griega delta minúscula
y σ es la letra griega sigma minúscula.

La profundidad de penetración es la distancia que una onda de frecuencia f penetra hacia el interior del conductor.

Podéis ver la profundidad de penetración en el módulo "Propagación de ondas electromagnéticas".

Utilizando las ecuaciones (164) y (165) podemos definir las atenuaciones del dieléctrico α_d y del conductor α_c :

$$\alpha_d = \frac{1}{2} \omega \sqrt{\mu \epsilon} \tan(\delta_l) \quad (166)$$

$$\alpha_c = \frac{1}{2} \frac{R'}{Z_0} = R_s \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{h} \quad (167)$$

μ es la letra griega mu minúscula.

De las expresiones (166) y (167) podemos deducir que, para una profundidad de penetración δ constante con la frecuencia f ,

- la atenuación en el dieléctrico, α_d , crece linealmente;
- la atenuación en el conductor, α_c , crece con la raíz cuadrada de la frecuencia.

6.3.2. Líneas bifilares

Las líneas bifilares están formadas por dos conductores en forma de hilo situados en paralelo uno respecto al otro (ved la figura 64). Se utilizan desde hace mucho tiempo en líneas telegráficas y telefónicas.

Figura 64

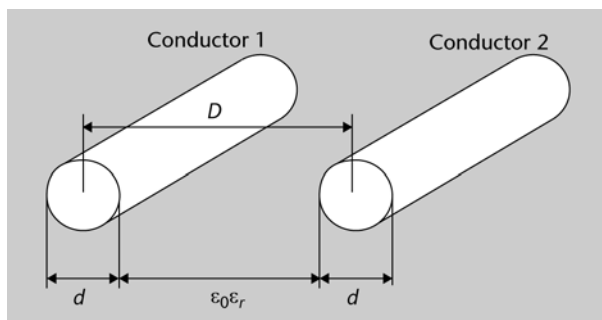


Figura 64

Línea de transmisión bifilar en la que los dos conductores se encuentran separados por un dieléctrico de constante dieléctrica relativa ϵ_r .

Este tipo de líneas tienen el problema de que, al estar muy descubiertas (normalmente sólo están recubiertas por un revestimiento de plástico), se ven muy afectadas por radiaciones e interferencias externas. También tienen una atenuación intrínseca muy alta, hecho que hace difícil obtener unas impedancias características bastante bajas para permitir la transmisión de una señal a largas distancias.

La impedancia característica de una línea bifilar se puede calcular mediante la siguiente ecuación:

$$Z_0 = \frac{120}{\sqrt{\epsilon_r}} \cosh^{-1}\left(\frac{D}{d}\right) \quad (168)$$

donde:

- D es la distancia entre los dos conductores y
- d el diámetro de los conductores (podéis ver la figura 64).

Los problemas de radiación y de interferencias en este tipo de líneas se pueden solucionar mediante los métodos siguientes:

- El trenzado de los cables. De esta manera hacemos que la propia inducción cruzada entre los cables sea la menor posible gracias al cruzamiento de un conductor con otro.
- El apantallamiento utilizando un material conductor, que hace de barrera contra interferencias externas.

Recordad

Dentro de un conductor el campo es cero. Pensad por ejemplo en la jaula de Faraday, en la que utilizamos una caja totalmente sellada y metálica para aislar su contenido de interferencias externas.

6.3.3. Líneas de transmisión coaxiales o concéntricas

Los conductores coaxiales se utilizan mucho, ya que no tienen las deficiencias de las líneas bifilares.

Estas líneas están constituidas por dos conductores cilíndricos concéntricos. El conductor exterior normalmente se fabrica con una malla de hilos trenzados sobre un núcleo dieléctrico (normalmente de teflón o polietileno) que cubre totalmente el conductor interno (ved la figura 65).

Figura 65

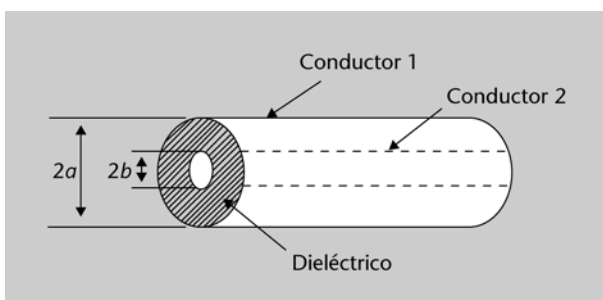


Figura 65

Diseño de líneas de transmisión coaxiales.

Dada la simetría de la estructura, la corriente se distribuye uniformemente y su impedancia característica Z_0 es:

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad (169)$$

y la resistencia unitaria R :

$$R = \frac{R_s}{2\pi} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (170)$$

donde:

- R_s es la resistencia total del conductor,
- a es el radio exterior de la línea, y
- b es el radio interior de la línea.

Su atenuación por pérdidas en los conductores podemos definirla como:

$$\alpha_c = \frac{R}{2Z_0} = \frac{R_s \sqrt{\epsilon_r}}{120 \cdot 2\pi a} \frac{1 + \frac{a}{b}}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \quad (171)$$

Observad que la atenuación es inversamente proporcional al diámetro del cable y, por tanto, para tramos muy largos (como para líneas de televisión por cable o Internet), conviene hacerlo cuanto más ancho mejor para reducir al máximo la atenuación. Esta solución no es tan fácil como parece, ya que un cable muy ancho suele ser muy caro y muy pesado.

6.3.4. Líneas triplaca

Las líneas de transmisión triplaca están formadas por una tira conductora de amplitud W centrada entre dos planos conductores (ved la figura 66), separados por un dieléctrico de grueso h .

Las líneas triplaca en inglés se denominan *stripline*.

En la actualidad, la estructura de este tipo de líneas está formada por dos láminas dieléctricas (de grueso $h/2$) con una de las caras metalizada (conductores exteriores, 1 y 3 en la figura 66, o planos de masa). De estas dos láminas, una de ellas también tiene en la otra cara la tira conductora central, de manera que se completa la estructura poniendo en contacto las láminas dieléctricas y juntándolas fuertemente.

Figura 66

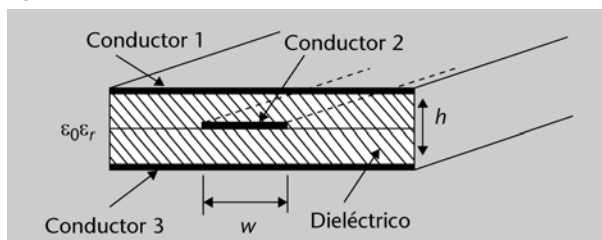


Figura 66

Estructura de la línea triplaca. Observad que la placa del conductor 2 se encuentra en el dieléctrico superior.

Las ventajas de esta línea son:

- su carácter blindado (muy protegido frente a las interferencias externas), y
- la facilidad de fabricar circuitos complejos mediante técnicas fotolitográficas.

Su principal inconveniente es su carácter cerrado (integrado en la placa de un circuito), hecho que no permite la inserción de componentes para diseñar circuitos más avanzados o modificaciones y adaptaciones.

Su impedancia característica se puede calcular mediante:

$$Z_0 = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_r}} \frac{K'(x)}{K(x)} \quad \text{on} \quad x = \tanh\left(\frac{\pi W}{2H}\right) \quad (172)$$

y donde $K(x)$ y $K'(x)$ se denominan *integrales elípticas de primera especie*, que se definen según las ecuaciones siguientes:

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2 \sin^2(\varphi)}} \quad (173)$$

$$K'(x) = K(\sqrt{1-x^2}) \quad (174)$$

donde x es una variable cualquiera utilizada para la obtención de los valores en las integrales elípticas (173) y (174). En función de los valores del cuadrado de x , x^2 , podemos encontrarnos con los casos siguientes:

$$\text{si } 0 \leq x^2 \leq 0,5: \quad \frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{1}{\pi} \ln \left(2 \frac{1+\sqrt{x'}}{1-\sqrt{x'}} \right) = F(x') \quad (175)$$

$$\text{si } 0,5 \leq x^2 \leq 1: \quad \frac{K'(x)}{K(x)} = \frac{1}{F(x)} \quad (176)$$

$$\text{donde} \quad x' = \sqrt{1-x^2} \quad (177)$$

El cálculo de la resistencia unitaria es bastante complejo, a causa de la distribución no uniforme de la corriente en la placa y en los planos de masa.

También hay que decir que, como consecuencia de su diseño, las líneas triplaca tienen muy buen comportamiento en frecuencia.

6.3.5. Línea micropista

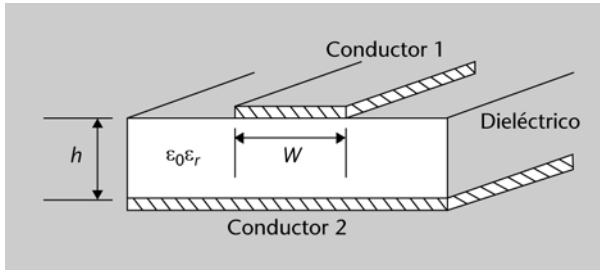
La línea micropista es una línea de transmisión plana, similar a las líneas coplanares, formada por una tira conductora de amplitud W sobre una lámina dieléctrica de grueso h (también denominada *sustrato*) que en la otra cara tiene un plano de masa (ved la figura 67), con una estructura similar a la de la línea triplaca.

Integral elíptica

Una integral elíptica de primera especie es un caso particular de la integral elíptica. Existen integrales elípticas de primera especie, completas e incompletas. Las primeras dependen de una sola variable (x) y las segundas dependen de dos variables.

Las líneas micropista en inglés se denominan *microstrip*.

Figura 67

**Figura 67**

Estructura de la línea micropista.

Esta línea tiene la ventaja de que, al no tener otra capa de dieléctrico encima, es mucho más sencillo realizar circuitos más avanzados montando los elementos en la superficie de la placa, y también que, gracias a su diseño, es más fácil de fabricar.

La capacidad se puede calcular con la ayuda de transformadas conformes, si bien en este caso, a causa de la inhomogeneidad del dieléctrico hay que introducir aproximaciones que simplifiquen los cálculos, con un grado de error inferior al 1%. La impedancia característica, Z_0 , en este tipo de líneas de transmisión se expresa según:

$$Z_0 = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln \left(\frac{8h}{W} + \frac{W}{4h} \right) \quad (178)$$

donde ϵ_r es la constante dieléctrica relativa del dieléctrico y h es el grueso del dieléctrico; también se puede definir una constante dieléctrica ϵ_{ref} para $W/h \leq 1$ como:

$$\epsilon_{ref} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \left(1 + \frac{10H}{W} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (179)$$

Si tenemos $W/h \geq 1$ obtenemos:

$$Z_0 = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} \left[\frac{W}{H} + 1,393 + 0,667 \ln \left(\frac{W}{H} + 1,444 \right) \right]^{-1} \quad (180)$$

El cálculo de la atenuación causada por el dieléctrico, α_D , y en el conductor, α_C , en este caso es bastante complicado.

En este tipo de líneas el comportamiento en frecuencia se ve afectado por la dispersión, o diferencia de velocidad de transmisión de las señales con diferente frecuencia por el interior de la línea.

6.3.6. Líneas coplanares

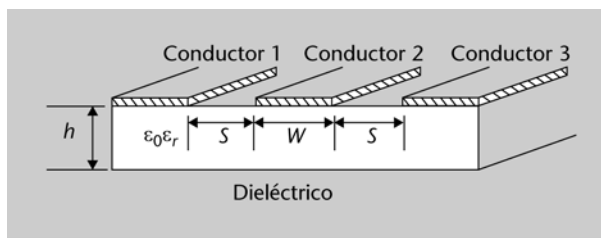
En las líneas micropistas los contactos a masa de los componentes que añadimos externamente se deben realizar a través del sustrato dieléctrico, que se

debe perforar. Esto, en el caso de los sustratos duros, como pueden ser los sustratos del tipo cerámico o de cuarzo, implica una cierta complicación.

Las líneas coplanares, que ahora veremos, solucionan parte del problema que tienen las líneas micropista.

Las líneas coplanares están formadas por una tira conductora y dos semiplanos conductores de masa, equidistantes de esta y situados en el mismo plano (podéis ver la figura 68).

Figura 68

**Figura 68**

Estructura de la línea de transmisión coplanar.

En este caso se puede calcular la impedancia característica de la línea de transmisión, Z_0 , mediante la expresión:

$$Z_0 = \frac{30\pi}{\sqrt{\epsilon_{ref}}} \frac{K'(x)}{K(x)} \quad (181)$$

donde x toma el valor:

$$x = \frac{W}{W + 2S} \quad (182)$$

En este caso, el valor de la constante dieléctrica ϵ_{ref} se puede calcular con:

$$\epsilon_{ref} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} \left\{ \tanh \left[0,775 \ln \left(\frac{h}{S} \right) + 1,75 \right] + \frac{xS}{h} [0,04 - 0,7x + 0,01(1 - 0,1\epsilon_r)(0,25 + x)] \right\} \quad (183)$$

6.4. ¿Qué hemos aprendido?

Al comienzo de este apartado hemos hecho una pequeña introducción a las líneas de transmisión con pérdidas, para poder definir un poco cómo son las ecuaciones que rigen el comportamiento de las líneas de transmisión no ideales.

Hemos explicado a nivel conceptual cuáles son las principales causas de las pérdidas en las líneas de transmisión (los propios conductores, la radiación, el calentamiento y el acoplamiento) y hemos visto cómo se veían afectadas las ecuaciones de los parámetros de las líneas de transmisión.

Después hemos hecho un rápido repaso a algunos de los tipos de líneas de transmisión más importantes que podéis encontrar hoy en día y a las ecuaciones que definen los parámetros principales, en función de su estructura. Hemos clasificado las líneas como:

- líneas de placas paralelas
- líneas bifilares
- líneas coaxiales o concéntricas
- líneas triplaca
- líneas micropista
- líneas coplanares

7. Problemas resueltos

7.1. Enunciados

1) Una línea de transmisión con impedancia característica $Z_0 = 50 \Omega$ está cargada con una impedancia de valor $Z_L = 50 + j25 \Omega$. Calculad:

- a) El coeficiente de reflexión en la carga, ρ_L .
- b) El coeficiente de transmisión, τ_L .

2) Una línea de transmisión con impedancia característica $Z_0 = 75 \Omega$ está cargada con una impedancia de valor $Z_L = 10 + j50 \Omega$. Calculad:

- a) El valor de la relación de onda estacionaria S (o ROE).
- b) Los valores de amplitud máximo y mínimo para una onda de amplitud $|V| = 2 \text{ V}$ y fase $\phi = -\pi/4$ radianes.

3) Una línea de transmisión con impedancia característica $Z_0 = 50 \Omega$ está cargada con una impedancia de valor $Z_L = 50 + j25 \Omega$. Utilizando la carta de Smith, calculad:

- a) El coeficiente de reflexión, ρ_L (módulo y fase).
- b) El coeficiente de reflexión y la impedancia a $\lambda/2$ de la carga.
- c) El coeficiente de reflexión y la impedancia a $\lambda/8$ de la carga.

4) Una línea de transmisión con impedancia característica $Z_0 = 50 \Omega$ está cargada con una impedancia de carga igual a $Z_L = 25 + j50 \Omega$. Calculad:

- a) El coeficiente de reflexión en la carga, ρ_L .
- b) El valor de la impedancia en serie para adaptar la línea.
- c) La longitud de una segunda línea para adaptar la primera línea a la carga.

7.2. Soluciones

1) a) Podemos obtener el coeficiente de reflexión en la carga mediante la ecuación 46:

$$\begin{aligned}\rho_L &= \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{50 + j25 - 50}{50 + j25 + 50} = \frac{j25}{100 + j25} = \\ &= 0,059 + j0,235 \Omega = 0,24e^{j0,42\pi}\end{aligned}\quad (184)$$

2) Como el coeficiente de transmisión es el complementario del coeficiente de reflexión, obtenemos el coeficiente de transmisión con la ecuación (59):

$$\begin{aligned}\tau &= 1 - \rho = 1 - (0,059 + j0,235) = \\ &= 0,941 - j0,235 = 0,97e^{-j0,078\pi}\end{aligned}\quad (185)$$

3) a) Para calcular el parámetro S , primero hay que calcular el coeficiente de reflexión (46):

$$\rho_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{10 + j50 - 75}{10 + j50 + 75} = \frac{-65 + j50}{85 + j50} \quad (186)$$

$$= -0,31 + j0,77 = 0,83e^{-j0,88\pi}$$

y entonces calculamos el parámetro S con la ecuación (118):

$$S = \frac{1 + |\rho_L|}{1 - |\rho_L|} = \frac{1 + 0,83}{1 - 0,83} = 10,87 \quad (187)$$

b) Una vez tenemos el valor de ρ_L , podemos calcular los valores de amplitud máximo y mínimo con las ecuaciones (106) y (108), respectivamente:

$$|V_{max}| = |V|(1 + |\rho_L|) = 2 \cdot (1 + 0,83) = 3,66 \text{ V} \quad (188)$$

$$|V_{min}| = |V|(1 - |\rho_L|) = 2 \cdot (1 - 0,83) = 0,34 \text{ V} \quad (189)$$

4) a) Lo primero que debemos hacer es normalizar la impedancia de carga respecto al valor de la impedancia de la línea.

$$\bar{Z} = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{50 + j25}{50} = 1 + j0,5 \Omega \quad (190)$$

y ahora localizaremos este punto sobre la carta de Smith. Como podéis ver en la figura 69 (punto A), podéis leer en la barra inferior el módulo del coeficiente de reflexión $|\rho| = 0,24$, y en la circunferencia externa, la fase del coeficiente de reflexión $\angle = 75^\circ$.

Figura 69

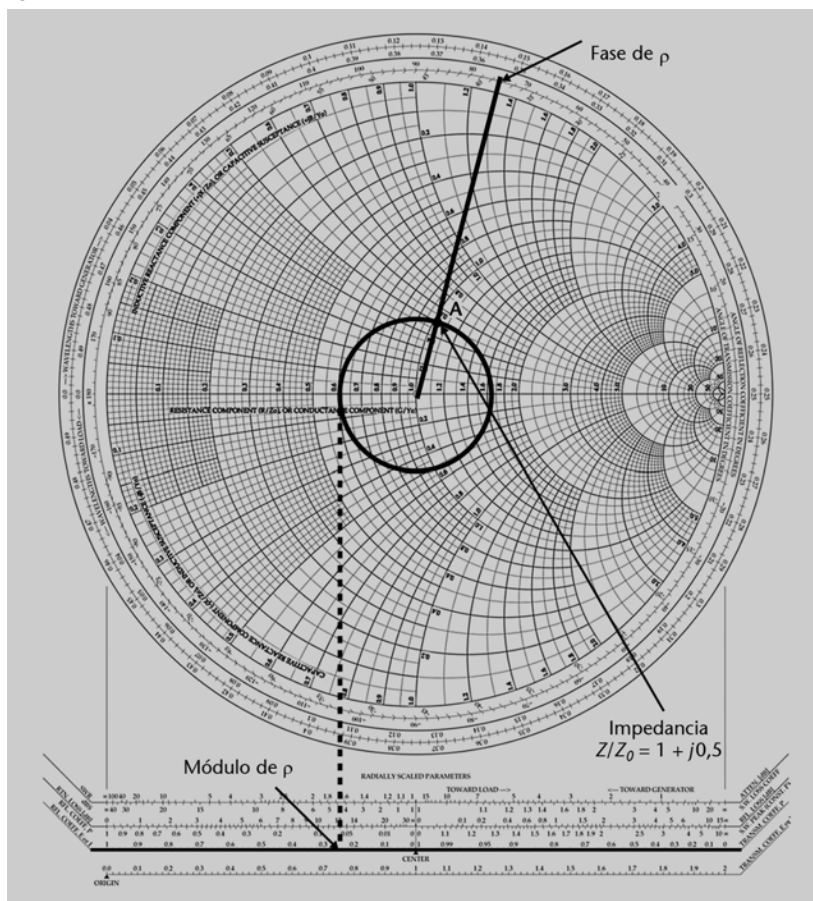


Figura 69

Posición de la impedancia normalizada $Z = 1 + j0,5$ en la carta de Smith.

Atención

Observad que escribimos el ángulo en radianes. Para pasar de grados a radianes basta con:

$$\text{radian} = \text{graus} \cdot \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$$

Recordad que a causa del hecho de que la impedancia tiene la parte imaginaria positiva, es una reactancia inductiva y, por ello, tomamos el valor de la reactancia que se encuentra en la parte superior de la carta de Smith.

En la figura 70 podéis observar que la aplicación que tenéis en el enlace de interés os da directamente el valor del coeficiente de reflexión: $\rho_L = 0,24e^{j0,42\pi}$ ($|\rho| = 0,24$ y $\angle = 75^\circ = 0,42\pi$)

Enlace de interés

También podéis utilizar la aplicación de la página web de Interactive Smith Chart:

<http://www.amanogawa.com/archive/LossLessSmithChart/LossLessSmithChart-2.html>

Figura 70

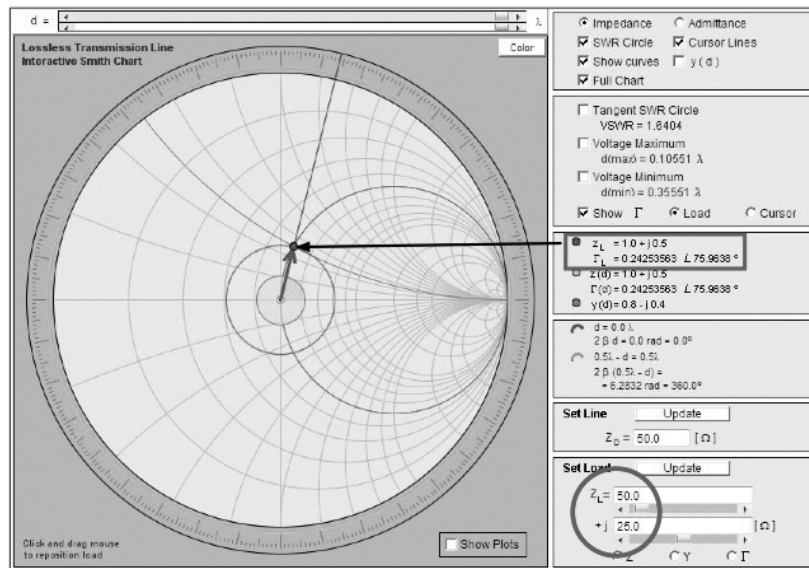


Figura 70

Representación de la impedancia normalizada $Z = 1 + j0,5$ sobre la carta de Smith utilizando una aplicación de Internet.

b) Para calcular cómo se propaga el coeficiente de reflexión a lo largo de la línea de transmisión, sólo debemos recorrer la circunferencia centrada en la carta una distancia $\lambda/2$.

A causa de la propiedad de periodicidad de las ondas (y de la carta de Smith), veremos que llegamos al mismo punto en el que estábamos. Por tanto, el coeficiente de reflexión nos queda:

$$\rho(d = \frac{\lambda}{2}) = \rho = 0,24e^{+j0,42\pi} \quad (191)$$

Y la impedancia será la misma:

$$\bar{Z} = 1 + j0,5\Omega \quad (192)$$

c) Si ahora queremos hacer lo mismo para $\lambda/8$, basta con recorrer en la circunferencia, en el sentido horario, una distancia equivalente a 90° (la cuarta parte de una vuelta, que sería $\lambda/2$). El resultado que obtendremos será el punto B en la siguiente figura:

Figura 71

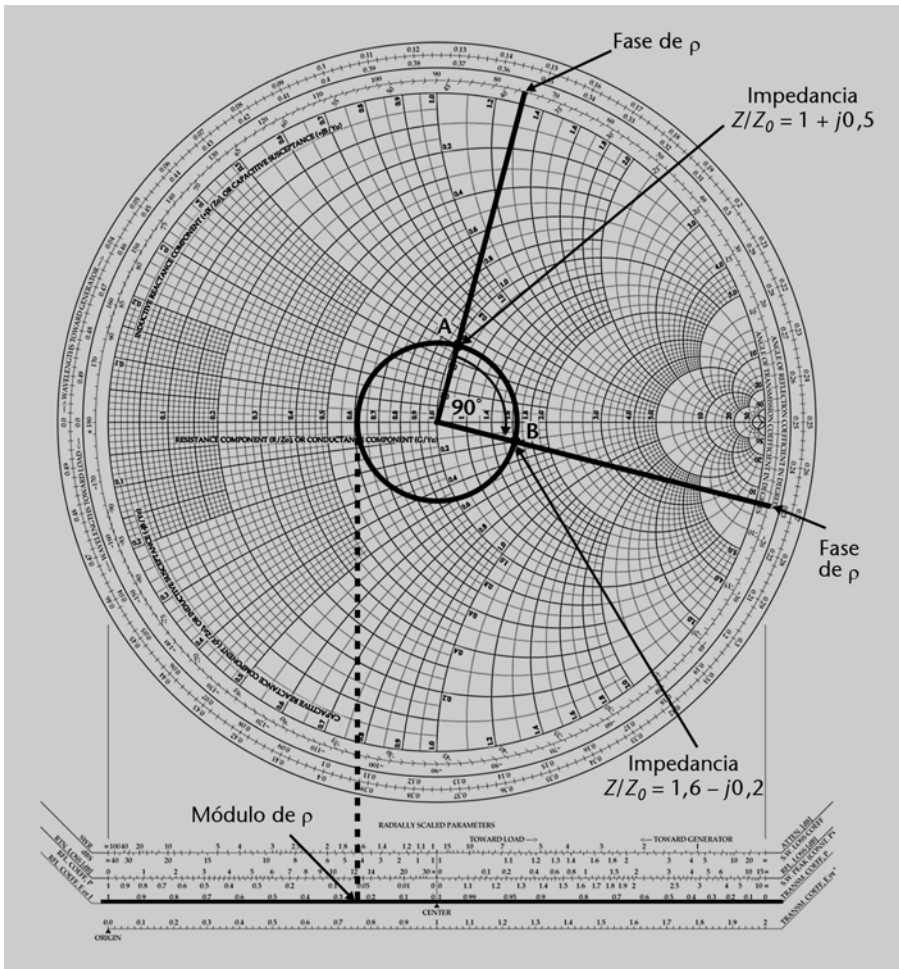


Figura 71

Punto A de impedancia $\bar{Z} = 1 + j0,5$ transformado en el punto B de impedancia $\bar{Z} = 1,6 - j0,2$ mediante una rotación de 90° .

El coeficiente de reflexión será (observad que pasamos los grados a radianes para poder poner la forma exponencial):

$$\rho(d = \frac{\lambda}{8}) = \rho = 0,24e^{-j0,083\pi} \quad (193)$$

y la impedancia resultante en este punto es:

$$\bar{Z} = 1,6 - j0,2 \, \Omega \quad (194)$$

Podéis comprobar los valores en la aplicación de la página web mencionada en el apartado a) del problema.

5)

a) Lo primero que haremos para calcular el coeficiente de reflexión es encontrar la impedancia normalizada $\bar{Z}$:

$$\bar{Z} = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{25 + j50 \, \Omega}{50 \, \Omega} = 0,5 + j1 \quad (195)$$

A partir de la impedancia normalizada calcularemos el coeficiente de reflexión en la carga, ρ_L (con la ecuación 46):

$$\begin{aligned}\rho_L &= \frac{\bar{Z} - 1}{\bar{Z} + 1} = \frac{0,5 + j1 - 1}{0,5 + j1 + 1} = \frac{-0,5 + j1}{1,5 + j1} = \\ &= 0,076 + j0,61 = 0,62e^{j0,46\pi}\end{aligned}\quad (196)$$

b) Con el coeficiente de reflexión, podemos observar que existe una reflexión de la onda incidente de retorno al generador. Para adaptar la línea el coeficiente de reflexión debe ser $\rho_L = 0$ (o, lo que es el mismo, $\bar{Z} = 1$). Para que se cumpla esta condición, hay que añadir una impedancia normalizada de valor $\bar{G} = R + j\chi$ de manera que la suma de las dos impedancias sea:

$$\bar{Z} + \bar{G} = 1 \quad (197)$$

Si sustituimos los valores del enunciado nos queda la siguiente igualdad:

$$(0,5 + j1) + (R + j\chi) = 1 \quad (198)$$

Que podemos separar por la parte real y la parte imaginaria:

$$0,5 + R = 1 \quad (199)$$

$$j1 + j\chi = 0 \quad (200)$$

De la ecuación (199) resolvemos $R = 0,5$, y de la ecuación (200) $\chi = -1$. Por tanto, la impedancia normalizada que debemos añadir debe ser:

$$\bar{G} = 0,5 - j1 \quad (201)$$

Y sin normalizar:

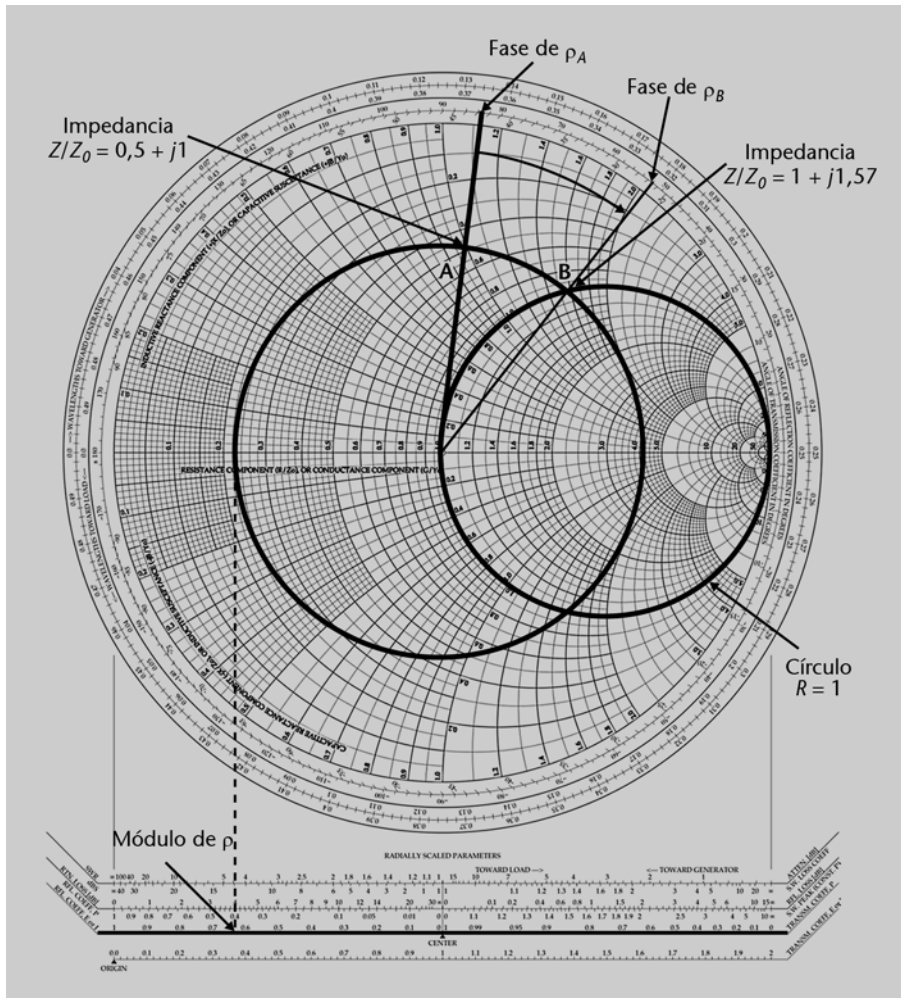
$$G = 25 - j50 \, \Omega \quad (202)$$

Reactancia capacitiva

El valor negativo de la parte imaginaria de la impedancia nos indica que es una reactancia capacitiva.

Para no tener que introducir en la línea más de un componente adaptador pasivo (uno puramente resistivo y el otro solo reactivo), lo que haremos es buscar el punto de la línea de transmisión en el que la parte real de la impedancia de carga es igual a 1. Por tanto, buscaremos el punto más próximo al punto A de la carta de Smith que corta la circunferencia de $R = 1$ (podéis ver la figura 72). Este es el punto B.

Figura 72

**Figura 72**

Carta de Smith con el punto A de impedancia $Z = 0,5 + j1$ y el punto más próximo (punto B) que corta la circunferencia de $R = 1$.

El punto más próximo que corta la circunferencia de $R = 1$ se encuentra a una distancia $d = 0,043\lambda$ de la carga, en la impedancia $\bar{Z} = 1 + j1,57$. Es en este punto donde introduciremos una reactancia capacitiva de valor $\chi = -1,57$.

Resumen

En este módulo hemos definido una línea de transmisión como un elemento que sirve para transmitir ondas electromagnéticas, como una señal eléctrica, de un dispositivo a otro. Normalmente, la línea de transmisión transmitirá las señales de una fuente hasta una carga.

El funcionamiento de la línea de transmisión se basa en el tiempo que tarda la señal, u onda electromagnética, en propagarse por el interior de la línea.

Los parámetros que caracterizan una línea de transmisión son:

- su longitud, l ,
- su impedancia característica, Z_0 ,
- su coeficiente de propagación, β .

Utilizaremos el modelo de líneas de transmisión cuando queramos transmitir señales con una longitud de onda muy superior a la longitud de la línea de transmisión. Si la línea de transmisión es muy corta, no es necesario aplicar el modelo de línea de transmisión, y es suficiente con la teoría de circuitos tradicional.

Definimos un modelo de línea de transmisión basándonos en la aproximación cuasiestática. Este modelo, o circuito equivalente, está compuesto por:

- una resistencia $R'dz$,
- una capacidad $C'dz$,
- una conductancia $G'dz$,
- una inductancia $L'dz$.

Del análisis diferencial del modelo equivalente de la línea de transmisión obtenemos las ecuaciones de onda en una dimensión (también denominadas ecuaciones del telegrafista) de la tensión y de la corriente:

$$\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2} - \gamma^2 v(z,t) = 0 \quad (203)$$

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} - \gamma^2 i(z,t) = 0 \quad (204)$$

donde γ es la constante de propagación de la línea de transmisión. Esta constante de propagación tiene una componente debida a la atenuación de la línea, α , y una constante de fase, β . La constante de propagación se define como:

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad (205)$$

En el caso de líneas de transmisión ideales, la atenuación es nula, $\alpha = 0$.

La solución a las ecuaciones de onda para la tensión y la corriente son:

$$v(z,t) = V^+ e^{j\omega t - \gamma z} + V^- e^{j\omega t + \gamma z} \quad (206)$$

$$i(z,t) = I^+ e^{j\omega t - \gamma z} + I^- e^{j\omega t + \gamma z} \quad (207)$$

Estas ondas están formadas por una onda incidente, o progresiva (superíndice positivo), y una onda reflejada, o regresiva (superíndice negativo), que viajan en sentidos contrarios. Las ondas incidentes viajan de la fuente a la carga y las reflejadas, de la carga a la fuente.

A partir de la aplicación de la ley de Ohm entre las ondas de tensión y de corriente, hemos definido la impedancia característica de la línea de transmisión, Z_0 :

$$Z_0 = \frac{v^+}{i^+} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad (208)$$

Este modelo equivalente, y la impedancia característica, están definidos de la forma más próxima posible a la realidad. Para simplificar los cálculos, hemos aproximado este modelo más real al modelo de líneas de transmisión ideales. Las líneas de transmisión ideales se caracterizan por tener $R' = 0$ y $G' = 0$.

Si la línea de transmisión está cargada con una impedancia diferente de la impedancia característica de la línea, aparecen ondas reflejadas. La relación entre la onda reflejada y la onda incidente es el coeficiente de reflexión:

$$\rho_L = \frac{v^-}{v^+} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (209)$$

La adaptación de la línea se produce cuando no hay onda reflejada en la carga y, por tanto, se cumple la condición:

$$\rho_L = 0 \quad (210)$$

Podemos definir el coeficiente de transmisión, τ , de la misma manera que el coeficiente de reflexión, como la relación entre la onda regresiva (subíndice b) y la nueva onda progresiva que se crea (subíndice a):

$$\tau_{ab} = \frac{v_{b1}^+}{v_{a1}^+} = \frac{v_{a1}^+ + v_{a1}^-}{v_{a1}^+} \quad (211)$$

Las ondas que circulan dentro de las líneas de transmisión tienen una periodicidad de $\lambda/2$. Este hecho provoca invariancia de la impedancia de entrada cuando añadimos líneas de transmisión de longitud igual a $\lambda/2$.

El coeficiente de reflexión se “propaga” a lo largo de la línea de transmisión en el caso sin pérdidas, según:

$$\rho(z) = \frac{v^-}{v^+} = \frac{V^- e^{+j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z}} = \rho_L e^{j2\beta z} \quad (212)$$

De la interferencia entre las ondas progresivas y regresivas que circulan por el interior de la línea de transmisión, aparecen las ondas estacionarias. La ecuación de la onda estacionaria para el caso sin pérdida es:

$$v(z,t) = 2|V^+| \cos(\beta z) \sin(\omega t + 2\phi) \quad (213)$$

Las ondas estacionarias se caracterizan con la relación de onda estacionaria (ROE), simbolizada por S y que se define como:

$$S = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|} \quad (214)$$

También hemos visto que la impedancia de carga que se ve en cada punto de la línea es diferente: si ponemos una carga de impedancia Z_L , la impedancia a lo largo de la línea, en el caso sin pérdidas, vendrá dada por la ecuación:

$$Z(z) = Z_0 \frac{Z_L \cos \beta z + jZ_0 \sin \beta z}{Z_0 \cos \beta z + jZ_L \sin \beta z} = Z_0 \frac{Z_L + jZ_0 \tan \beta \ell}{Z_0 + jZ_L \tan \beta \ell} \quad (215)$$

Para saber cómo se propaga esta impedancia, y conocer los coeficientes de reflexión y transmisión, hemos visto que en lugar de resolver las ecuaciones (75) y (58) (ecuaciones 212 y 215), respectivamente, se puede utilizar la carta de Smith. Gracias al modo como esta carta simplifica los cálculos, es una herramienta indispensable a la hora de adaptar impedancias.

Finalmente, hemos visto los principales tipos de líneas de transmisión:

- líneas de placas paralelas
- líneas bifilares
- líneas coaxiales o concéntricas.
- líneas triplaca
- líneas micropista
- líneas coplanares

Ejercicios de autoevaluación

1. Hay que tener en cuenta los efectos de propagación cuando...
 - a) la longitud de onda es muy superior a la longitud de la línea de transmisión.
 - b) la longitud de onda es muy inferior a la longitud de la línea de transmisión.
 - c) no hay ninguna relación entre la longitud de onda y los efectos de propagación.
 - d) Todas las respuestas anteriores son falsas.
2. Cuando una onda progresiva incide sobre la carga,...
 - a) la carga absorbe toda la onda progresiva.
 - b) la carga refleja toda la onda progresiva.
 - c) Una combinación de las anteriores, en función de la relación entre la impedancia de carga y la impedancia característica de la línea.
 - d) Todas las respuestas anteriores son falsas.
3. Según el modelo equivalente de línea de transmisión...
 - a) la línea se divide en secciones elementales y hay que estudiar en cada caso qué elementos la constituyen.
 - b) la línea se divide en secciones elementales constituidas por una resistencia $R'dz$, una conductancia $G'dz$, un condensador $C'dz$ y una autoinductancia $L'dz$, que no existen realmente en la línea, sino que se usan para modelar su comportamiento.
 - c) la línea se divide en secciones elementales y se modelan los efectos de propagación de esta sección mediante una resistencia $R'dz$, una conductancia $G'dz$, un condensador $C'dz$ y una autoinductancia $L'dz$, que no existen realmente en la línea, sino que se usan para modelar su comportamiento.
 - d) toda la línea se comporta como un gran condensador C .
4. Para estudiar la línea sin pérdidas consideramos que...
 - a) la autoinductancia, $L'dz$, y la capacidad, $C'dz$, de la línea son 0.
 - b) la autoinductancia, $L'dz$, y la resistencia, $R'dz$, de la línea son 0.
 - c) la capacidad, $C'dz$, y la resistencia, $R'dz$, de la línea son 0.
 - d) la resistencia, $R'dz$, y la conductancia, $G'dz$, de la línea son 0.
5. En la línea cargada con una impedancia adaptada...
 - a) la onda de tensión no se refleja en la carga.
 - b) la onda de tensión se refleja parcialmente en la carga.
 - c) la onda de tensión se refleja totalmente en la carga.
 - d) Todas las respuestas anteriores son falsas.
6. En la línea cargada con un circuito abierto...
 - a) la onda de tensión no se refleja en la carga.
 - b) la onda de tensión se refleja parcialmente en la carga.
 - c) la onda de tensión se refleja totalmente en la carga.
 - d) Todas las respuestas anteriores son falsas.
7. En la línea cargada con un cortocircuito...
 - a) la onda estacionaria de tensión es 0 en la carga y en los puntos correspondientes a cada cuarto de longitud de onda ($d = \lambda/4$), por lo que es como si tuviésemos un cortocircuito en estos puntos, sin tenerlo realmente.
 - b) la onda estacionaria de tensión es 0 en la carga y en los puntos correspondientes a cada semilongitud de onda ($d = \lambda/2$), por lo que es como si tuviésemos un cortocircuito en estos puntos, sin tenerlo realmente.
 - c) la onda estacionaria de corriente es 0 en la carga y en los puntos correspondientes a cada cuarto de longitud de onda ($d = \lambda/4$), por lo que es como si tuviésemos un circuito abierto en estos puntos, sin tenerlo realmente.
 - d) la onda estacionaria de corriente es 0 en la carga y en los puntos correspondientes a cada semilongitud de onda ($d = \lambda/2$), por lo que es como si tuviésemos un circuito abierto en estos puntos, sin tenerlo realmente.
8. En la línea cargada con un circuito abierto...
 - a) la onda estacionaria de tensión es 0 en la carga y en los puntos correspondientes a cada cuarto de longitud de onda ($d = \lambda/4$), por lo que es como si tuviésemos un cortocircuito en estos puntos, sin tenerlo realmente.
 - b) la onda estacionaria de tensión es 0 en la carga y en los puntos correspondientes a cada semilongitud de onda ($d = \lambda/2$), por lo que es como si tuviésemos un cortocircuito en estos puntos, sin tenerlo realmente.
 - c) la onda estacionaria de corriente es 0 en la carga y en los puntos correspondientes a cada cuarto de longitud de onda ($d = \lambda/4$), por lo que es como si tuviésemos un circuito abierto en estos puntos, sin tenerlo realmente.

d) la onda estacionaria de corriente es 0 en la carga y en los puntos correspondientes a cada semilongitud de onda ($d = \lambda/2$), por lo que es como si tuviésemos un circuito abierto en estos puntos, sin tenerlo realmente.

9. La impedancia de entrada de la línea de transmisión es...

- a)** periódica en los puntos de la línea que son múltiplos enteros de un cuarto de longitud de onda ($d = \lambda/4$), independientemente de la impedancia característica de la línea y de la impedancia de carga.
- b)** periódica en los puntos de la línea que son múltiplos enteros de un cuarto de longitud de onda ($d = \lambda/4$), sólo cuando haya adaptación de impedancias.
- c)** periódica en los puntos de la línea que son múltiplos enteros de la semilongitud de onda ($d = \lambda/2$), independientemente de la impedancia característica de la línea y de la impedancia de carga.
- d)** periódica en los puntos de la línea que son múltiplos enteros de la semilongitud de onda ($d = \lambda/2$), sólo cuando haya adaptación de impedancias.

10. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- a)** Las líneas coplanares solucionan los problemas de acceso al sustrato de las líneas micro-pista.
- b)** Las líneas triplaca están formadas por tres placas separadas por dos conductores y ofrecen una gran protección frente a las interferencias.
- c)** La condición de “bajas pérdidas” se da cuando circulan ondas electromagnéticas de alta frecuencia dentro de la línea de transmisión.
- d)** Todas las respuestas anteriores son ciertas.

Solucionario

1. b; 2. c; 3. c; 4. d; 5. a; 6. c; 7. a; 8. b; 9. c; 10. c

Glosario

adaptación de impedancias *f* Condición de carga de una línea de transmisión que evita la aparición de la onda reflejada.

carta de Smith *f* Herramienta gráfica utilizada para simplificar la adaptación de la impedancia de una línea de transmisión con su carga y, en general, para facilitar los cálculos en las líneas de transmisión.

coeficiente de reflexión *m* Relación entre la amplitud de la onda reflejada y la amplitud de la onda incidente.

coeficiente de transmisión *m* Relación entre la amplitud de la onda transmitida y la amplitud de la onda incidente.

ecuaciones del telegrafista *f pl* Conjunto de ecuaciones diferenciales que relacionan la corriente y la tensión a lo largo de una línea de transmisión. A partir de estas ecuaciones se puede obtener la onda.

impedancia característica *f* Relación entre la amplitud de la onda progresiva de tensión y la amplitud de la onda progresiva de corriente.

línea de transmisión *f* Estructura destinada a la guía controlada o delimitada de una onda electromagnética.

onda estacionaria *f* Onda resultante de la interferencia, a lo largo de la línea de transmisión, de la onda progresiva y de la onda regresiva.

onda progresiva *f* Onda que viaja en la dirección de z positiva, es decir, en dirección del generador a la carga.

onda regresiva *f* Onda que viaja en la dirección de z negativa, es decir, en dirección de la carga al generador.

relación de onda estacionaria *f* Relación entre la amplitud máxima y mínima de una onda estacionaria. Normalmente se define con las amplitudes de la onda estacionaria de tensión.
sigla ROE

ROE *f* Véase relación de onda estacionaria.

Bibliografía

Bará Temes, J. (1991). *Curs de microones*. Barcelona: Edicions UPC.

Pozar, D. M. (1998). *Microwave Engineering* (2.^a ed.). John Wiley & Sons.

